Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

# $L$-Funktionen und $\varepsilon$-Konstanten II

## 4. Übungsblatt

10.05.2017

**Aufgabe 1** (*2+2+3+4+2+3+3=19 Punkte*). Sei $K$ ein Körper.

(a) Sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Gib einen kanonischen Isomorphismus $\mathrm{d}_K(V^*) \cong (\mathrm{d}_K(V))^*$ an.
*Hinweis:* Erinnere dich an die Leibniz-Formel für Determinanten.

(b) Sei $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ ein Isomorphismus von $K$-Vektorräumen der Dimension $n$. Dieser induziert einen kanonischen Isomorphismus

$$\varphi_f\colon\ \mathrm{d}_K(V)\,\mathrm{d}_K(W)^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_K.$$

Wählen wir Basen und $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und $w = (w_1, \ldots, w_n)$, so induziert das eine Wahl einer Basis von $\mathrm{d}_K(V)\,\mathrm{d}_K(W)^{-1}$, die wir $b$ nennen. Zeige, dass

$$\varphi_f(b) = \det_{v,w}(f)$$

gilt, wenn wir die kanonische Identifikation von $\mathbf{1}_K \cong K$ benutzen. Hier ist mit $\det_{v,w}(f)$ die Determinante von $f$ bezüglich der Basen $v$ und $w$ gemeint, d. h. die Determinante der Abbildungsmatrix von $f$ in diesen Basen.

Im folgenden verwenden wir die folgende Notation: Ist $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ eine Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten, so sei $\widetilde{A} \in \mathrm{M}_{n\times m}(K)$ eine Matrix, für die

$$A\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

gilt, wobei die Anzahl der Einsen die maximal mögliche ist (je nach Rang der Matrizen) und der Rest aus Nullen besteht.

(c) Konstruiere für jede kurze exakte Sequenz von $K$-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{d}_K(U)\,\mathrm{d}_K(W)\,\mathrm{d}_K(V)^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_K.$$

Wenn wir wie vorher Basen von $U$, $V$ und $W$ wählen und $A$ bzw. $B$ die Abbildungsmatrizen von $f$ bzw. $g$ bezüglich dieser Basen sind, wird die induzierte Basis von $\mathrm{d}_K(U)\,\mathrm{d}_K(W)\,\mathrm{d}_K(V)^{-1}$ auf

$$\det\begin{pmatrix} A & \widetilde{B} \end{pmatrix}$$

abgebildet.

(d) Es sei

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $K$-Vektorräumen. Konstruiere einen kanonischen Isomorphismus

$$\prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}_K(V_i)^{(-1)^i} \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_K.$$

Wähle dann wie vorher Basen der Vektorräume und schreibe $A_i$ für die Abbildungsmatrix von $f_i$. Zeige, dass die induzierte Basis der linken Seite auf

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & \widetilde{A}_2 & & & \\ & A_3 & \widetilde{A}_4 & & \\ & & A_5 & \widetilde{A}_6 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

abgebildet wird (an den freien Stellen stehen jeweils Nullen).

*Hinweis:* Den Isomorphismus findet man mithilfe einer vollständigen Induktion. Für die zweite Aussage wähle zuerst geschickt Basen der Vektorräume $V_i$ und zeige, dass die Aussage für diese Basenwahl zutrifft. Dann zeige: wenn die Aussage für eine gegebene Basiswahl zutrifft, dann auch für jede andere.

Ab jetzt sei $K$ ein Zahlkörper, $M$ ein $K$-Motiv über $\mathbb{Q}$ und $\Delta_K(M)$ seine fundamentale Gerade.

(e) Erkläre, woher der Perioden-Regulator-Isomorphismus

$$\vartheta_\infty : K_\mathbb{R} \underset{K}{\otimes} \Delta_K(M) \xrightarrow{\sim} \mathbf{1}_{K_\mathbb{R}}$$

kommt. Hierzu muss die Gültigkeit der Vermutung 5 (von Fontaine und Perrin-Riou) für $M$ angenommen werden.

(f) Wir wählen $K$-Basen aller Vektorräume, die in der Definition der fundamentalen Gerade involviert sind. Das liefert eine Identifikation der fundamentalen Gerade mit $K$,

$$\beta : K = \mathbf{1}_K \xrightarrow{\sim} \Delta_K(M).$$

Wie lässt sich die resultierende Abbildung

$$\vartheta_\infty \circ \beta : K_\mathbb{R} \longrightarrow K_\mathbb{R}$$

beschreiben?

(g) Wie vereinfacht sich diese Beschreibung, wenn $M$ kritisch ist? Nehmen wir an, dass die $L$-Funktion von $M$ wohldefiniert ist und auf $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden kann, und dass die Deligne-Beilinson-Vermutungen (Vermutung 4 und 8 aus der Vorlesung) für $M$ gelten. Was bedeutet das dann konkret für den Wert der $L$-Funktion $L(M, 0)$?

**Aufgabe 2** (*3 Punkte*)**.** Sei $n \in \mathbb{Z}$ ungerade und negativ. Beweise die Deligne-Beilinson-Vermutungen (Vermutungen 4 und 8 aus der Vorlesung) für das Motiv $\mathbb{Q}(n)$. Benutze dafür die üblichen bekannten Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion.

---

Abgabe in der Übung am 17. Mai oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 17. Mai.