Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

3. Übungsblatt

03.05.2017

Aufgabe 1 (*2+1+3+3=9 Punkte*). In dieser Aufgabe sei F ein Zahlkörper. Wir schauen uns das Motiv $M := \mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} F)_{\mathbb{Q}}$ und Artin-Motive genauer an.

(a) Wir wählen einen algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ und Einbettungen $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Sei weiter I_F die Menge der Einbettungen $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$. Zeige, dass das Motiv M die folgende konkrete Beschreibung hat.

- $M_{\mathrm{B}} = \mathbb{Q}^{I_F}$ mit Hodge-Struktur vom Typ $(0,0)$, die Aktion der komplexen Konjugation ι wird von der Aktion von ι auf I_F induziert;
- $M_{\mathrm{dR}} = F$ mit Filtrierung $M^0_{\mathrm{dR}} = M_{\mathrm{dR}}$, $M^1_{\mathrm{dR}} = 0$;
- $M_\ell = \mathbb{Q}_\ell^{I_F}$ und die Aktion von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ ist gegeben durch
$$(\sigma\alpha)(\tau) = \alpha(\sigma^{-1} \circ \tau)$$
für $\alpha\colon I_F \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell$, $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ und $\tau\colon F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$;
- Wenn wir $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} M_{\mathrm{B}}$ mit $\mathbb{C}^{I_F}$ identifizieren, dann ist g_∞ durch $g_\infty(1 \otimes x)(\tau) = \tau(x)$ gegeben;
- g_ℓ ist die Identität;
- Wenn wir $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes M_\ell$ mit $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{I_F}$ identifizieren, dann ist g_{dR} durch $g_{\mathrm{dR}}(1 \otimes x)(\tau) = \tau(x)$ gegeben.

(b) Seien ρ_1, ρ_2 Artin-Darstellungen mit Koeffizienten in einem Zahlkörper K, d. h. Homomorphismen
$$\rho_i\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \operatorname{Aut}_K(V_i) \quad (i = 1,2)$$
mit endlichem Bild für endlichdimensionale K-Vektorräume V_1, V_2. Sei
$$\rho_1 \oplus \rho_2\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \operatorname{Aut}_K(V_1 \oplus V_2)$$
der induzierte Homomorphismus. Zeige, dass dann für die zugehörigen Artin-Motive
$$[\rho_1] \oplus [\rho_2] = [\rho_1 \oplus \rho_2]$$
gilt.

(c) Sei jetzt $F/\mathbb{Q}$ ein quadratischer Zahlkörper. Zeige, dass sich das Motiv $\mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} F)_{\mathbb{Q}}$ zerlegt als
$$\mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} F)_{\mathbb{Q}} = \mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} \mathbb{Q})_{\mathbb{Q}} \oplus [\rho]$$
mit einer Artin-Darstellung ρ. Wie sieht ρ konkret aus?
(Wer sich ein wenig mit Darstellungstheorie endlicher Gruppen auskennt, darf gerne darüber nachdenken, was passiert, wenn F ein allgemeiner Galoisscher Zahlkörper ist und wir $\mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} F)_K$ für einen genügend großen Zahlkörper K betrachten.)

(d) Sei $\rho\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \operatorname{Aut}_K(V)$ eine Artin-Darstellung. Dann induziert die Inklusion
$$(V \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}})^{\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}} \subseteq V \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \overline{\mathbb{Q}}$$
die beiden Vergleichsisomorphismen g_∞ und g_{dR} für das Motiv $[\rho]$. Wie genau bekommen wir die Abbildungen zwischen den richtigen Räumen und warum sind diese Isomorphismen?

Aufgabe 2 (*1+1=2 Punkte*)**.** Sei G eine proendliche Gruppe und X eine topologische abelsche Gruppe mit stetiger G-Aktion. Zeige:

(a) $\mathrm{H}^0(G, X) = X^G$.

(b) Wenn G trivial auf X operiert, dann ist $\mathrm{H}^1(G, X) = \mathrm{Hom}(G, X)$ (hier sind stetige Gruppenhomomorphismen gemeint).

Aufgabe 3 (*2+2+2=6 Punkte*)**.** In dieser Aufgabe sei K ein Zahlkörper und M, N seien K-Motive über $\mathbb{Q}$. Wir nehmen an, dass die L-Funktionen von M und N wohldefiniert sind und eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzen.

(a) Zeige
$$L(M \oplus N, s) = L(M, s) \cdot L(N, s) \quad (s \in \mathbb{C}).$$

(b) Zeige für alle $n \in \mathbb{Z}$
$$L(M(n), s) = L(M, s + n) \quad (s \in \mathbb{C}).$$

(c) Zeige, dass für jeden Zahlkörper F gilt
$$L(\mathrm{h}^0(\operatorname{Spec} F)_{\mathbb{Q}}, s) = \zeta_F(s) \quad (s \in \mathbb{C}),$$
wobei ζ_F die Dedekindsche Zetafunktion von F ist. Erinnere dich dann an Aufgabe 1 (c) und schaue, was daraus folgt.

Abgabe in der Übung am 10. Mai oder vorher in mein Postfach neben Zimmer 3/417.
Besprechung in der Übung am 10. Mai.