Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

L-Funktionen und ε-Konstanten II

1. Übungsblatt

19.04.2017

Auf dem ganzen Blatt bezeichne K einen Zahlkörper.

Aufgabe 1. Sei M ein K-Motiv über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) M ist kritisch.

(ii) Die Komposition

$$\mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{B}}^{+} \hookrightarrow \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{B}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} M_{\mathrm{dR}} \twoheadrightarrow \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathrm{t}_M$$

ist ein Isomorphismus. Hier ist die mittlere Abbildung der Vergleichsisomorphismus g_∞ und die beiden anderen die kanonischen Abbildungen.

(iii) Für alle $j, k, l \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $j < k$ und $\mathcal{H}^{i,j}(M) \neq 0$, dann $j < 0$ und $k \geq 0$, und wenn $\mathcal{H}^{l,l}(M) \neq 0$, dann operiert die komplexe Konjugation ι auf $\mathcal{H}^{l,l}(M)$ als $+1$ für $l < 0$ und -1 für $l \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei $\lambda \in \mathrm{S_f}(K)$ und V eine λ-adische Darstellung von $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ oder $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$. Sei ? entweder „dR" oder „crys".

(a) Warum ist $\mathrm{D}_?(V)$ ein K_λ-Vektorraum?

(b) Finde eine kanonische Abbildung $\mathrm{B}_? \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{D}_?(V) \longrightarrow \mathrm{B}_? \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} V$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{Z}_\ell(1) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mu_{\ell^n}$ und $\mathbb{Q}_\ell(1) = \mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Z}_\ell(1)$, wobei $\mu_{\ell^n} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}^\times$ die Gruppe der ℓ^n-ten Einheitswurzeln in einem algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$ sei und die Übergangsabbildungen jeweils durch $\zeta \longmapsto \zeta^\ell$ gegeben sind. Zeige: $\mathrm{D_{crys}}(\mathbb{Q}_\ell(1))$ ist eindimensional und φ_ℓ operiert darauf durch Multiplikation mit ℓ^{-1}.

Benutze hierzu die folgenden Fakten:

(1) $\dim_{\mathbb{Q}_\ell} \mathrm{D_{crys}}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_\ell}(V)$ für alle ℓ-adischen Darstellungen V.

(2) Sei $\mathrm{t} \in \mathrm{B_{crys}} \subseteq \mathrm{B_{dR}}$ das in der Vorlesung erwähnte ausgezeichnete Element und sei $\kappa\colon \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ der *zyklotomische Charakter*, der $\sigma(\zeta) = \kappa(\sigma)\zeta$ für alle $\zeta \in \mathbb{Q}_\ell(1)$ und $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ erfüllt. Dann gilt $\varphi_\ell(\mathrm{t}) = \ell\mathrm{t}$ und $\sigma(\mathrm{t}) = \kappa(\sigma)\mathrm{t}$ für $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbb{Q}_\ell}$.

Keine Abgabe, Besprechung am 26.04.2017 in der Übung.