Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Otmar Venjakob
Michael Fütterer

Oberseminar: Die Eigenkurve

Wintersemester 2016/17

Die Eigenkurve ist eine rigid-analytische Kurve, die über dem Gewichtsraum lebt (dessen Punkte $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$ entsprechen), sodass die Fasern über klassischen Gewichten Hecke-Eigenformen entsprechen. Colemans und Mazurs ursprüngliche Konstruktion wurde von Buzzard axiomatisiert und verallgemeinert. Er führte die „Eigenvarietätenmaschine“ ein, die zu gewissen Eingangsdaten eine rigid-analytische Varietät liefert. Um die Coleman-Mazur-Eigenkurve zu erhalten, muss man die Maschine mit überkonvergenten Modulformen füttern, welche recht kompliziert zu definieren sind. Stevens erkannte, dass man stattdessen auch überkonvergente modulare Symbole verwenden kann, die einfacher zu handhaben sind. Dieser Ansatz wurde von Bellaïche ausgearbeitet. Das Ziel des Seminars ist es, diese Konstruktion zu verstehen.

Wir folgen dem Text [Bel10]. Alle Angaben von Paragraphen beziehen sich auf diesen Text, wenn nichts anderes dabeisteht. Die Aufgaben in diesem Text sind nebensächlich und können grundsätzlich weggelassen werden.

Vortrag 1: Crashkurs Modulformen, modulare Symbole und Heckeoperatoren (kurz). Im ersten Vortrag sollen die notwendigen Grundlagen aus der Theorie der Modulformen und Heckeoperatoren, modulare Symbole sowie die Theorie der Neuformen erklärt werden.

Vortrag 2: Eigenalgebren. In diesem Vortrag sollen Eigenalgebren definiert und ihre grundlegenden algebraischen und geometrischen Eigenschaften präsentiert werden. Abschnitte I.1–I.5 (hier können die einfachen Beweise mündlich präsentiert werden), I.7.1–I.7.3 , I.9.

Vortrag 3: Kompakte Operatoren auf nichtarchimedischen Banachmoduln. Definiere Banach-Moduln, Orthonormalisierbarkeit und potentielle Orthonormalisierbarkeit [Buz07, §2, S. 4–7, S. 16]. Dann sollte II.1–2 präsentiert werden, wobei je nach verfügbarer Zeit die verwendeten Resultate aus [Buz07] skizziert werden können.

Vortrag 4: Die Eigenvarietätenmaschine. Hier wird Buzzards Eigenvarietätenmaschine axiomatisch eingeführt. Dann werden die Existenz einer Eigenvarietät und einige ihrer Eigenschaften gezeigt. Abschnitte II.3–5; Lemma II.4.4 soll nicht bewiesen werden. Die Beweise in §II.5 können auch weggelassen werden.

Vortrag 5: Folgenräume, Distributionen und der Gewichtsraum. Hier werden wichtige Beispiele von nichtarchimedischen Banachmoduln studiert, die später zur Definition von modularen Symbolen benutzt werden. Anschließend wird der Gewichtsraum definiert. Abschnitte III.4–III.5. Die Lemmata III.4.30 und III.5.4 können weggelassen werden; der Beweis von Thm. III.4.31 kann gekürzt oder ebenfalls weggelassen werden.

Vortrag 6: Rigid-analytische und überkonvergente modulare Symbole. Einführung von rigid-analytischen und überkonvergenten modularen Symbolen und ihr Verhältnis zu klassischen modularen Symbolen, Abschnitt III.6. Das Hauptresultat dieses Vortrags ist Stevens' Kontrolltheorem (Thm. III.6.36), die eher technischen Beweise am Anfang können gerne gekürzt werden. Prop. III.6.27 kann weggelassen werden.

Vortrag 7: Die Eigenkurve. Jetzt wird die Eigenvarietätenmaschine mit den überkonvergenten modularen Symbolen gefüttert und spuckt eine Eigenvarietät aus. Vorher müssen aber noch einige Voraussetzungen überprüft werden. Abschnitt IV.1. Der Beweis von Lemma IV.1.8 kann weggelassen werden.

Vortrag 8: Eigenschaften der Eigenkurve. Die Eigenkurve aus dem vorherigen Vortrag wird mit der von Coleman und Mazur konstruierten Eigenkurve verglichen. Anschließend werden die Punkte der Eigenkurve untersucht und gezeigt, dass klassische Punkte Eigenformen entsprechen. Abschnitte IV.2–3.

Vortrag 9: Galoisdarstellungen auf der Eigenkurve und weitere Anwendungen. Es wird gezeigt, dass es eine global auf der Eigenkurve definierte Pseudodarstellung gibt, die an klassischen Punkten zu Delignes Galoisdarstellung für Eigenformen spezialisiert (Abschnitt IV.4). Je nach Interesse können dann weitere Anwendungen behandelt werden, z. B. geometrische Eigenschaften der Eigenkurve (§IV.6), die Verbindung zu Hida-Familien (§IV.5) oder p-adische L-Funktionen auf der Eigenkurve (Kap. V).

Literatur

[Bel10] Joël Bellaïche. *Eigenvarieties, families of Galois representations, p-adic L-functions. Incomplete notes from a Course at Brandeis university given in Fall 2010.* 2010. URL: `http://people.brandeis.edu/~jbellaic/preprint/coursebook.pdf`.

[Buz07] Kevin Buzzard. „Eigenvarieties“. In: *L-functions and Galois representations.* London Mathematical Society Lecture Notes Series 320. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, S. 333–380.