Seminar: Quadratische Formen über den rationalen Zahlen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Katharina Hübner

Literatur: J.P. Serre *A Course in Arithmetic* Ch. I - Ch. V

Vortrag 1: Ch. I, §1,§2 Endliche Körper

Satz: Sei K ein endlicher Körper. Dann gibt es eine Primzahl p und ein $r \in \mathbb{N}$, so daß K genau $q = p^r$ Elemente besitzt. Zu jedem $q = p^r$ gibt es (bis auf Isomorphie) genau einen Körper mit q Elementen. Diesen Körper bezeichnet man mit $\mathbb{F}_q$.

Satz: $\mathbb{F}_q^\times$ ist eine zyklische Gruppe, d.h. es gibt ein $x \in \mathbb{F}_q^\times$, so daß $\mathbb{F}_q^\times = \{x, x^2, \ldots, x^{q-1}\}$.
Weiter werden Gleichungen über endlichen Körpern behandelt.

Vortrag 2: Ch. I, §3 Das quadratische Reziprozitätsgesetz.

Satz: a) Ist $p = 2$, so sind alle Elemente von $\mathbb{F}_q$ Quadrate.
b) Ist $p \neq 2$, so gilt:

$$\#\{x \in \mathbb{F}_q^\times | \exists y \in \mathbb{F}_q : y^2 = x\} = \frac{q-1}{2}$$

Definition: Sei $p \neq 2$, $x \in \mathbb{F}_p^\times$. Das Legendre Symbol $\left(\frac{x}{p}\right)$ ist definiert durch

$$\left(\frac{x}{p}\right) = \begin{cases} +1 & x \text{ ist Quadrat} \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\left(\frac{xy}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right)\left(\frac{y}{p}\right).$$

Satz: Seien $\ell, p \neq 2$ Primzahlen. Dann gilt:

$$\left(\frac{\ell}{p}\right) = \left(\frac{p}{\ell}\right)(-1)^{\frac{\ell-1}{2}\frac{p-1}{2}}.$$

Zusatz:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Beispiel:

$$\left(\frac{29}{43}\right) = \left(\frac{43}{29}\right) = \left(\frac{14}{29}\right) = \left(\frac{2}{29}\right)\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{7}{29}\right) = -\left(\frac{29}{7}\right) = -\left(\frac{1}{7}\right) = -1,$$

also ist 29 kein Quadrat mod 43.

Vortrag 3 Ch. II, §1,§2: p-adische Zahlkörper

Sei p eine Primzahl. Betrachte die formalen Potenzreihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, p^i.$$

Diese bilden einen Ring $\mathbb{Z}_p$. Der Quotientenkörper

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ \frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{Z}_p,\ y \neq 0 \right\}$$

heißt Körper der p-adischen Zahlen.

Vortrag 4: Ch. II, §3

Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{Q}_p$. Quadrate in $\mathbb{Q}_p^\times$.

Vortrag 5: Ch. III, §1 Das lokale Hilbertsymbol

Sei $k = \mathbb{Q}_p$ oder $\mathbb{R}$.
Für $a, b \in k^\times$ setze:

$$(a, b) = \begin{cases} +1, & \text{falls } z^2 - ax^2 - by^2 = 0 \text{ eine Lösung } \neq (0,0,0) \text{ in } k^3 \text{ hat.} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eigenschaften. Berechnung in Termen des Legendre-Symbols.

Vortrag 6: Ch. III, §2 Das globale Hilbert-Symbol

Sei $k = \mathbb{Q}$. Es gibt Einbettungen $\mathbb{Q} \xrightarrow{i_p} \mathbb{Q}_p$, $\forall\, p$ und $\mathbb{Q} \xrightarrow{i_\infty} \mathbb{R}$.
Seien $a, b \in \mathbb{Q}^\times$. Setze $(a, b)_\nu = (i_\nu(a), i_\nu(b))$ für $\nu = p$ oder ∞.
Satz: $(a, b)_\nu = 1$ für fast alle ν. $\prod_\nu (a, b)_\nu = 1$.

Vortrag 7 Ch. IV, §1:

Quadratische Formen (Wiederholung aus der lin. Algebra)
Quadratische Formen über $\mathbb{F}_q$

Vortrag 8: Ch. IV, §2

Quadratische Formen über $\mathbb{Q}_p$, Klassifikation

Vortrag 9 Ch. IV, §3

Quadratische Formen über $\mathbb{Q}$ (3.1,3.2)

Satz von Hasse-Minkowski: Sei $f = a_1x_1^2 + \cdots a_nx_n^2$, $a_i \in \mathbb{Q}^\times$ eine quadratische Form und f_ν ($\nu = p, \infty$) die entsprechende Form, wenn man a_i unter i_ν als Element von $\mathbb{Q}_\nu$ bzw. $\mathbb{R}$ auffaßt. Dann gilt: f stellt 0 dar $\Longleftrightarrow$ f_ν stellt 0 dar für alle $\nu = p, \infty$.

Vortrag 10 Ch. IV, §3.3 und Appendix

Klassifikation, Summe von 3 Quadraten, Satz von Lagrange, Satz von Gauß über Dreieckszahlen.

Vortrag 11 Ch. V, §1 und Teile von §2

Ganzzahlige quadratische Formen mit Diskriminante ± 1, die Kategorien S_n, S, Operationen auf S, Invarianten, Beispiele, die Gruppe $K(S)$. Theorem 3 aus 2.2 und Beweis (3.1)

Vortrag 12

Ch. V 2.1 alles, aus 2.2. Theorem 4 und Korollar, Beweise 3.1.–3.4.