Seminar Quadratische Formen
WS 2018/19

Dr. Katharina Hübner
Gregor Pohl

Eines der ältesten Probleme der Mathematik besteht in der Suche nach rationalen Lösungen polynomialer Gleichungen, wie zum Beispiel der Fermat-Gleichung $a^n + b^n = c^n$. An diesem Beispiel sieht man schon, dass diese Aufgabe extrem kompliziert werden kann, insbesondere, wenn der Grad n der Gleichung groß ist. Dass Fermats letzter Satz gerade für $n \geq 3$ lange offen war, ist kein Zufall. Die Lösung linearer Gleichungen (also $n = 1$) ist mit den Mitteln der linearen Algebra zu bewältigen. Der Fall quadratischer Gleichungen erfordert schon einiges an Zahlentheorie, ist aber weitestgehend verstanden, während es für $n \geq 3$ kein allgemeingültiges Erfolgsrezept gibt. Dieser quadratische Fall ist es, dem wir uns in diesem Seminar widmen wollen.

Dazu betrachten wir ein quadratisches Polynom p in d Variablen. Will man herausfinden, ob p eine rationale Nullstelle hat, bietet es sich an als erstes Ausschlusskriterium zu prüfen, ob es eine reelle Nullstelle gibt. Der übergeordnete Grund, warum das in den reellen Zahlen viel einfacher ist als in den rationalen besteht darin, dass $\mathbb{R}$ vollständig (bezüglich des Standardabsolutbetrags $|\cdot|$) ist. Dadurch kann man Lösungen durch Grenzwertprozesse finden (z. B. Newtonverfahren).

Der Standardabsolutbetrag ist nicht der einzige Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$. Für jede Primzahl p gibt es einen p-adischen Absolutbetrag $|\cdot|_p$, der misst, wie oft der Faktor p in einer gegebenen rationalen Zahl vorkommt. Wenn man $\mathbb{Q}$ bezüglich $|\cdot|_p$ vervollständigt, erhält man die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Ähnlich wie in $\mathbb{R}$ ist es in $\mathbb{Q}_p$ sehr viel einfacher als in $\mathbb{Q}$ Lösungen einer polynomialen Gleichung zu finden.

Ist $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ eine Lösung für $p(X_1, \ldots, X_n) = 0$, so ist trivialerweise $(x_1, \ldots, x_n)$ auch eine Lösung in $\mathbb{Q}_p^n$ für alle p und in $\mathbb{R}^n$. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung: Gibt es für alle Primzahlen p eine Lösung in $\mathbb{Q}_p^n$ und außerdem eine reelle Lösung, so gibt es auch eine Lösung in $\mathbb{Q}$. Dies ist der Satz von Hasse-Minkowski, den zu beweisen das Hauptziel dieses Seminares ist. Er ist eine erste Inkarnation eines lokal-global-Prinzips, das globale Objekte (über $\mathbb{Q}$) mit lokalen Objekten (über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$) in Verbindung bringt.

Voraussetzungen: Lineare Algebra I

Zeit: Mittwochs um 14:00

Vorbesprechung: Mittwoch, den 25.7.2018 um 13:00 in Seminarraum 3

Literatur: J.P. Serre *A Course in Arithmetic* Ch. I - Ch. V