Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 10
zu bearbeiten bis Dienstag, 27.01.2015

Aufgabe 1. *(Invarianz von Idealen unter Morphismen nahe der Identität)*
Sei $K|k$ eine endliche Erweiterung von Körpern der Charakteristik 0, $R = K[\![x_1, \dots, x_n]\!]$ der formale Potenzreihenring in n Variablen über K mit Maximalideal $\mathfrak{m}$ und $I \subset R$, $B \subset \mathfrak{m}$ zwei Ideale. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $B \cdot D(I) \subset I$,

(b) $B^j \cdot D^j(I) \subset I$ für alle $j \in \mathbb{N}$,

(c) I ist invariant unter jedem k-Automorphismus von R der Form $\mathbf{1} + B$, d. h. für jeden k-Automorphismus $\phi\colon R \to R$ mit $\phi(x_i) - x_i = b_i \in B$ für $i = 1, \dots, n$ gilt $\phi(I) = I$.

Hinweis: Benutze die Taylorentwicklung von Elementen in I und den Krull'schen Durchschnittsatz.

Aufgabe 2. *(Koeffizientenideale)*
Sei W eine glatte Varietät über einem Körper der Charakteristik 0, $\mathcal{I}$ eine Idealgarbe auf W mit max-ord$\,\mathcal{I} = r$. Ist s eine natürliche Zahl, so ist das *Koeffizientenideal der Ordnung s* zu $\mathcal{I}$ die Idealgarbe

$$W_s(\mathcal{I}) := \left(\prod_{j=0}^{r-1} \big(D^j(\mathcal{I})\big)^{c_j} \;\middle|\; \sum_j (r-j)c_j \geq s \right) \subset \mathcal{O}_W.$$

(a) Zeige: Für $s, t \in \mathbb{N}$ gilt max-ord$\,W_s(\mathcal{I}) = s$ und

(1)	$W_{s+1}(\mathcal{I}) \subset W_s(\mathcal{I})$	(3)	$D(W_{s+1}) = W_s(I)$
(2)	$W_s(\mathcal{I}) \cdot W_t(\mathcal{I}) \subset W_{s+t}(\mathcal{I})$	(4)	$MC(W_s(\mathcal{I})) = W_1(\mathcal{I}) = MC(\mathcal{I})$

Folgere, dass alle Koeffizientenideale MC-invariant sind.

Hinweis: Für die schwierigere Richtung von (3) wähle man lokal bei einem abgeschlossenen Punkt $p \in V(\mathcal{I}, r)$ ein Element $x_1 \in MC(\mathcal{I})$ mit $\operatorname{ord}_p x_1 = 1$ und zeige per Induktion über t, dass $x_1^{s-t} W_t(\mathcal{I})_p \subset D(W_{s+1}(\mathcal{I}))_p$ für $t \leq s$.

(b) Sei $m = \mathrm{kgV}(2, \dots, r)$. Zeige mittels Schubfachprinzip, dass $W_{s+m}(\mathcal{I}) = W_s(\mathcal{I}) \cdot W_m(\mathcal{I})$ für alle $s \geq (r-1)m$ gilt. Folgere: Für $s = lm$ mit $l \geq r - 1$ gilt $W_s(\mathcal{I})^i = W_{is}(\mathcal{I})$ für alle $i \in \mathbb{N}$; insbesondere ist $W_s(\mathcal{I})$ D-ausgewogen.

Aufgabe 3. *(Tuning von Idealgarben)*
Sei W eine glatte Varietät über einem Körper der Charakteristik 0, $\mathcal{I}$ eine Idealgarbe auf W mit max-ord$\,\mathcal{I} = r$. Sei $s \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{J}$ eine Idealgarbe auf W mit $\mathcal{I}^s \subset \mathcal{J} \subset W_{rs}(\mathcal{I})$. Zeige per Induktion über m: Eine glatte Aufblasungsfolge

$$\Pi\colon W^{(m)} \xrightarrow{\pi_{m-1}} W^{(m-1)} \xrightarrow{\pi_{m-2}} \dots \xrightarrow{\pi_1} W^{(1)} \xrightarrow{\pi_0} W^{(0)} = W$$

ist genau dann eine glatte Aufblasungsfolge der Ordnung r zu $(W, \mathcal{I})$, wenn sie eine glatte Aufblasungsfolge der Ordnung rs zu $(W, \mathcal{J})$ ist. In diesem Fall gilt

$$\Pi_*^{-1}(\mathcal{I})^s \subset \Pi_*^{-1}(\mathcal{J}) \subset W_{rs}(\Pi_*^{-1}(\mathcal{I}))$$

und daher insbesondere $V(\Pi_*^{-1}(\mathcal{I}), r) = V(\Pi_*^{-1}(\mathcal{J}), rs)$.

Hinweis: Benutze Aufgabe 2, Lemma 8.3 aus der Vorlesung und die offensichtliche Transformationsregel $\pi_*^{-1}(\tilde{\mathcal{I}}_1 \tilde{\mathcal{I}}_2) = \pi_*^{-1}\tilde{\mathcal{I}}_1 \cdot \pi_*^{-1}\tilde{\mathcal{I}}_2$ für markierte Ideale $\tilde{\mathcal{I}}_i = (\mathcal{I}_i, r_i)$ mit max-ord$\,\mathcal{I}_i \geq r_i$, $i = 1, 2$ (unter der Konvention $(\mathcal{I}_1, r_1)(\mathcal{I}_2, r_2) = (\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2, r_1 + r_2)$).

Aufgabe 4. *(Etale Äquivalenz)*
Sei X eine Varietät der Dimension n über einem perfekten Körper k, $x \in X$ ein abgeschlossener nichtsingulärer Punkt und $f_1, \dots, f_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ globale Schnitte, die ein reguläres System von Parametern von X bei x bilden. Zeige:

(a) Der durch $T_i \mapsto f_i$, $i = 1, \dots, n$, induzierte Morphismus $\phi : X \to \mathbb{A}^n_k = \operatorname{Spec} k[T_1, \dots, T_n]$ ist étale oberhalb einer Umgebung des Ursprungs von $\mathbb{A}^n_k$.

(b) Sei Y eine weitere Varietät der Dimension n über k und $g_1, \dots, g_n$ globale Schnitte auf Y, die ein reguläres System von Parametern bei einem abgeschlossenen Punkt $y \in Y$ bilden. Setze

$$Z = V(\mathrm{pr}_1^{\#}(f_1) - \mathrm{pr}_2^{\#}(g_1), \dots, \mathrm{pr}_1^{\#}(f_n) - \mathrm{pr}_2^{\#}(g_n)) \subset X \times_k Y.$$

Zeige, dass $\mathrm{pr}_1|_Z : Z \to X$ und $\mathrm{pr}_2|_Z : Z \to Y$ étale Morphismen sind.

Hinweis: Zeige, dass $Z = X \times_{\mathbb{A}^n_k} Y$, wobei $\phi' : Y \to \mathbb{A}^n_k$ durch $T_i \mapsto f_i$ definiert ist.

Folgere: Sind $p \in X$, $p' \in Y$ zwei beliebige nicht-singuläre Punkte der gleichen Kodimension, so sind sie *étale äquivalent*, d. h. es gibt eine k-Varietät Z, einen Punkt $q \in Z$ und endliche étale Morphismen $\psi \colon Z \to X$, $\psi' \colon Z \to Y$, so dass $\psi(q) = p$ und $\psi'(q) = p'$.