Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 8
zu bearbeiten bis Dienstag, 16.12.2014

Aufgabe 1. *(Stabile Einbettung in den affinen Raum)*
Sei k ein Körper, X eine affine Varietät über k und $i_1 : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ sowie $i_2 : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^m$ zwei abgeschlossene Immersionen in affine Räume über k. Sei $j_1 = (\mathrm{id}, 0) : \mathbb{A}_k^n \to \mathbb{A}_k^{n+m}$ (bzw. $j_2 = (0, \mathrm{id}) : \mathbb{A}_k^m \to \mathbb{A}_k^{n+m}$) die abgeschlossene Immersion auf die ersten n (bzw. die letzten m) Koordinaten. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_k^{n+m})$ gibt, der $j_1 \circ i_1$ in $j_2 \circ i_2$ überführt.

Hinweis. Zeige zunächst, dass i_1 über $X \overset{i_2}{\hookrightarrow} \mathbb{A}_k^m \xrightarrow{f_2} \mathbb{A}_k^m$ und i_2 über $X \overset{i_1}{\hookrightarrow} \mathbb{A}_k^n \xrightarrow{f_1} \mathbb{A}_k^m$ faktorisiert. Konstruiere dann $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_k^{n+m})$, so dass $\varphi_1 \circ j_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ j_2 \circ i_2$.

Aufgabe 2. *(Funktorielle Auflösung durch affine Überdeckungen)*
Sei X eine Varietät und $\{U_i\}_i$ eine endliche offene affine Überdeckung von X. Sei X' die affine Varietät $\coprod_i U_i$ mit dem surjektiven glatten Morphismus $\sigma : X' \to X$, gegeben durch die Inklusionen $U_i \hookrightarrow X$. Daneben sei X'' die affine Varietät $\coprod_{i,j} U_i \cap U_j$ mit den beiden surjektiven glatten Morphismen $h_1, h_2 \colon X'' \to X'$, wobei $h_1|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to U_i$ und $h_2|_{U_i \cap U_j} : U_i \cap U_j \to U_j$ jeweils die üblichen Inklusionsabbildungen sind. Sei

$$\mathbf{B}' \qquad \Pi: \qquad \begin{array}{ccccccccccc} X'_m & \xrightarrow{\pi_{m-1}} & X'_{m-1} & \xrightarrow{\pi_{m-2}} & \dots & \xrightarrow{\pi_1} & X'_1 & \xrightarrow{\pi_0} & X'_0 & = & X' \\ & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\ & & Z'_{m-1} & & & & Z'_1 & & Z'_0 & & \end{array}$$

eine Aufblasungsfolge zu X' mit $h_1^*\mathbf{B}' = h_2^*\mathbf{B}'$. Zeige, dass es eine eindeutig bestimmte Aufblasungsfolge $\mathbf{B}$ zu X gibt, so dass $\mathbf{B}' = g^*\mathbf{B}$.

Zur Erinnerung: Ein Morphismus vom endlichen Typ $f : Y \to X$ von Schemata ist *glatt (der relativen Dimension r)*, wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ offene affine Umgebungen $U = \operatorname{Spec} A \subset X$ von $f(y)$ und $V = \operatorname{Spec} A[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_m) \subset Y$ von y mit $n = m + r$ gibt, so dass das von den $m \times m$-Minoren von $(\frac{\partial P_i}{\partial T_j})_{ij}$ erzeugte Ideal nirgendwo in V verschwindet.

Aufgabe 3. *(Glatte Morphismen und abgeschlossene Immersionen)*
Sei $h : Y \to X$ ein glatter Morphismus von Varietäten über einem Körper k und $i : X \to W$ eine abgeschlossene Immersion von X in eine glatte k-Varietät W. Zeige, dass man für jeden Punkt $y \in Y$ nach Einschränken von Y, X und W auf lokale Umgebungen von y, $h(y)$ und $i(h(y))$ eine glatte k-Varietät V sowie eine abgeschlossene Immersion $j : Y \to V$ und einen glatten Morphismus $g : V \to W$ finden kann, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "j"] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, dashed, "g"] \\ X \arrow[r, "i"'] & W \end{tikzcd}$$

kartesisch ist.

Hinweis. Seien oBdA $V = \operatorname{Spec} B$, $X = \operatorname{Spec} A$ und $Y = \operatorname{Spec} A[T_1, \dots, T_n]/(P_1, \dots, P_m)$ affin wie oben. Wähle Repräsentanten $Q_i \in B[T_1, \dots, T_n]$ der P_i und konstruiere damit die Varietät W.

Aufgabe 4. *(Auflösung von Singularitäten für Flächen in beliebiger Charakteristik II)* Benutzen Sie die Methoden von Aufgabe 4 vom letzten Blatt, um die Aussage von Aufgabe 4 vom Blatt 5 über beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körpern zu beweisen:

Sei V eine glatte dreidimensionale Varietät über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k, $S \subset V$ eine Fläche und $r = \text{max-ord}\, S > 1$. Es sei Z entweder eine irreduzible glatte Kurve $C \subset \mathrm{Sing}_r(S)$ oder ein abgeschlossener Punkt in $\mathrm{Sing}_r(S)$. Sei $\pi : \tilde{V} \to V$ die Aufblasung entlang Z, $\tilde{S}$ die strikte Transformierte von S in $\tilde{V}$ und E der exzeptionelle Divisor von π. Dann ist $\mathrm{Sing}_r(\tilde{S}) \cap E$ entweder eine glatte Kurve oder eine endliche Menge von abgeschlossenen Punkten. Sind sowohl $Z = C$ als auch $\mathrm{Sing}_r(\tilde{S}) \cap E = \tilde{C}$ Kurven, so ist $\pi|_{\tilde{C}} : \tilde{C} \to C$ ein Isomorphismus. Für jeden Punkt $q \in \mathrm{Sing}_r(\tilde{S}) \cap E$ gilt $\tau(q) \geq \tau(\pi(q))$.

Hinweis. Für einen Punkt $p \in Z$ betrachte man die Aufblasung $\pi' \colon V' \to \hat{V}_p$ entlang $\hat{Z}_p$ und nutze die Notation aus Aufgabe 4 vom letzten Blatt. Beim Beweis ersetze man die formale Fläche maximalen Kontakts durch die *formale approximierende Mannigfaltigkeit* $N = V(M) \subset \hat{V}_p$ und zeige: Es gilt $\hat{Z}_p \subset N$; ist N' bzw. S' die strikte Transformierte von N bzw. $\hat{S}_p$ in V' und $E' = \pi'^{-1}(p)$, so gilt $\mathrm{Sing}_r(S') \cap E \subset N' \cap E$. Dabei hat $N' \cap E$ Dimension $2 - \tau(p)$, falls $\dim Z < \dim N = 3 - \tau(p)$ bzw. ist leer, falls $\hat{Z}_p = N$.