Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 7
zu bearbeiten bis Dienstag, 09.12.2014

Aufgabe 1. *(Keine Funktorialität für beliebige Morphismen)*
Sei k ein Körper der Charakteristik 0. Zeige: Es ist nicht möglich, jeder k-Varietät X einen birationalen Morphismus $f_X \colon X' \to X$ von einer glatten k-Varietät zuzuweisen, der in folgendem Sinne funktoriell ist: Für *jeden* Morphismus $\phi : X \to Y$ von k-Varietäten gibt es einen eindeutigen Morphismus $\phi' : X' \to Y'$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "f_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", near end] & Y' \arrow[d, "f_Y"] \\ X \arrow[r, "\phi"'] & Y. \end{tikzcd}$$

kartesisch ist.

Hinweis. Benutze das Beispiel $Y = \mathbb{A}^2_k \to X = V(y^2 - xz) \subset \mathbb{A}^3_k$, $(s,t) \mapsto (s^2, st, t^2)$.

Aufgabe 2. *(Funktorialität und Gruppenwirkung)*
Sei k ein algebraisch abgeschlossener[1] Körper der Charakteristik 0.

Eine *algebraische Gruppe* oder *Gruppenvarietät* über k ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie der k-Varietäten, also eine k-Varietät G zusammen mit Morphismen $\mu : G \times G \to G$, $\rho : G \to G$ und einem rationalen Punkt $e \in G(k)$, so dass $G(k)$ mit der Verknüpfung $\mu : G(k) \times G(k) \to G(k)$ und der Inversenabbildung $\rho : G(k) \to G(k)$ zu einer Gruppe mit neutralem Element e wird. Eine algebraische Gruppe G ist automatisch glatt über k (dies gilt nur in Charakteristik 0).

Sei G eine algebraische Gruppe über k und X eine k-Varietät. Sei $\alpha \colon G \times_k X \to X$ eine *Gruppenwirkung* von G auf X, d. h. $G(k) \to \operatorname{Aut} X$, $g \mapsto \alpha(g, \cdot)$, sei ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass α glatt ist, und folgere, dass für eine funktorielle Auflösung $f_X \colon X' \to X$ wie im 5. Ansatz aus der Vorlesung eine eindeutige Gruppenwirkung $\alpha' \colon G \times_k X' \to X'$ existiert, so dass f_X G-äquivariant ist, d. h. es gilt $f_X \circ \alpha' = \alpha \circ (\mathrm{id}_G \times f_X) : G \times_k X' \to X$.

Aufgabe 3. *(Basiswechsel von Aufblasungsfolgen)*
Sei $h : Y \to X$ ein flacher Morphismus von noetherschen Schemata und

$$\mathbf{B}: \qquad X_m \xrightarrow{\pi_{m-1}} X_{m-1} \xrightarrow{\pi_{m-2}} \ldots \xrightarrow{\pi_1} X_1 \xrightarrow{\pi_0} X_0 = X$$

eine Folge von Aufblasungen mit Zentren $Z_i \subset X_i$ für $i = 0, \ldots, m-1$. Sei

$$h^*\mathbf{B}: \qquad X_m \times_X Y \xrightarrow{\pi_{m-1} \times \mathrm{id}} X_{m-1} \times_X Y \xrightarrow{\pi_{m-2} \times \mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\pi_1 \times \mathrm{id}} X_1 \times_X Y \xrightarrow{\pi_0 \times \mathrm{id}} X_0 \times_X Y = Y$$

die basisgewechselte Kette von Morphismen. Zeige:

(a) $h^*\mathbf{B}$ ist eine Folge von Aufblasungen mit Zentren $Z_i \times_X Y \subset X_i \times_X Y$, $i = 0, \ldots, m-1$.

(b) Ist h surjektiv, so ist $\mathbf{B}$ eindeutig durch $h^*\mathbf{B}$ bestimmt.

Hinweis. Bestimme rekursiv Z_i aus $Z_i \times_X Y$.

---

[1] Die Aufgabe funktioniert genauso über einem beliebigen Körper der Charakteristik 0. Die Annahme, dass k algebraisch abgeschlossen ist, dient lediglich der Vereinfachung der Notation.

Aufgabe 4. *(Auflösung von Singularitäten für Flächen in beliebiger Charakteristik I)*
Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik, V eine glatte dreidimensionale Varietät über k, $S \subset V$ eine singuläre Fläche und $r = \text{max-ord}\, S > 1$. Sei $p \in S$ ein abgeschlossener Punkt, $f = 0$ die lokale Gleichung von S bei p und x, y, z formale lokale Koordinaten von $\hat{\mathcal{O}}_{V,p}$. Zu der Potenzreihenentwicklung

$$f = \sum_{i+j+k \geq r} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

wählen wir den Hauptteil $L(x, y, z) = \sum_{i+j+k=r} a_{ijk} x^i y^j z^k$ und definieren $\tau(p)$ als die Dimension des minimalen Unterraumes von $kx \oplus ky \oplus kz$, so dass $L \in k[M]$. Zeige:

(a) $\tau(p)$ hängt nicht von der Wahl der formalen lokalen Koordinaten ab. Es gilt $1 \leq \tau(p) \leq 3$.

(b) Sei $\tau(p) = 3$. Dann gibt es keine glatte Kurve C in $\mathrm{Sing}_r(S)$, die p enthält. Ist $\pi\colon V_1 \to V$ die Aufblasung von V in p und S_1 die strikte Transformierte von S in V_1, dann gilt $\mathrm{ord}_q\, S_1 < r$ für jeden Punkt $q \in \pi^{-1}(p)$.