Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 6
zu bearbeiten bis Dienstag, 02.12.2014

Aufgabe 1. *(Auflösung der Singularitäten einer Fläche)*
Wende den Auflösungsalgorithmus für eingebettete Flächen an, um die Singularitäten der Fläche $V(z^2 - (y^2 - x^3)^2 y) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ aufzulösen.

Aufgabe 2. *(Alternativer Beweis von Proposition 4.5)*
Sei V eine glatte dreidimensionale Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0, $S \subset V$ eine Fläche und $r = \operatorname{max-ord} S$. Sei $C \subset \operatorname{Sing}_r(X)$ eine glatte Kurve und $p \in C$ ein beliebiger Punkt. Seien x, y, z formale lokale Koordinaten von $\mathcal{O}_{V,p}$, so dass C formal lokal durch $x = z = 0$ und S durch

$$0 = f \coloneqq z^r + b_2(x,y)z^{r-2} + \ldots + b_r(x,y) \qquad \text{mit } b_2, \ldots, b_r \in k[\![x,y]\!]$$

gegeben ist. Zeige: Aus dieser formalen Normalform f von S lässt sich bereits ablesen, wie oft im Algorithmus der Proposition 4.5 in glatten Kurven über C aufgeblasen werden wird.

Aufgabe 3. *(Prinzipalisierung von Idealgarben in Dimension 2)*
Sei S_0 eine glatte Fläche über einem perfekten Körper k und $\mathcal{I}_0$ eine Idealgarbe auf S_0. Wir verfahren rekursiv wie folgt: Ist $(S_i, \mathcal{I}_i)$ bereits konstruiert, so sei $\pi_i : S_{i+1} \to S_i$ die Aufblasung von S_i in einem abgeschlossenen Punkt, bei dem $V(\mathcal{I}_i)$ kein snc-Divisor ist, und $\mathcal{I}_{i+1} = \pi_i^{-1}\mathcal{I}_i \cdot \mathcal{O}_{S_{i+1}}$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass dieser Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit einem Paar $(S_n, \mathcal{I}_n)$ abbricht, so dass $V(\mathcal{I}_n) \subset S_n$ ein snc-Divisor ist. Zeige dazu:

(a) Angenommen, dieser Algorithmus bricht nicht ab. Dann gibt es eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Punkten $p_i \in S_i$, so dass $\pi_i(p_{i+1}) = p_i$ und $V(\mathcal{I}_i)$ kein snc-Divisor bei p_i ist. Folgere mit Satz 3.4, dass $V(\mathcal{I}_i)$ auch kein nc-Divisor bei p_i ist.

(b) Zeige nun folgende formal lokale Variante des obigen Algorithmus: Sei $R_0 = \hat{\mathcal{O}}_{S_0,p_0}$ und $J \subset R_0$ ein (nicht notwendig von $\mathcal{O}_{S_0,p_o}$ stammendes) Ideal. Ist R_i konstruiert, so wähle man formale lokale Koordinaten x_i, y_i von R_i und definiere R_{i+1} als die Vervollständigung von $R_i[\frac{y_i}{x_i}]$ an dem Maximalideal $(x_i, \frac{y_i}{x_i})$. Für hinreichend großes n ist dann $V(JR_n) \subset \operatorname{Spec} R_n$ ein snc-Divisor. Folgere, dass eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ wie oben nicht existieren kann.

Hinweis. Sei $J = (f_1, \ldots, f_s)$. Zeige zunächst, dass es ausreicht, den Fall $s = 2$ zu betrachten. Wende nun Aufgabe 3 vom Blatt 5 auf das Element $f = f_1 \cdot f_2 \in R_0$ an, und folgere, dass für hinreichend großes m das Unterschema $V(fR_m) \subset \operatorname{Spec} R_m$ ein snc-Divisor ist. Somit gibt es formale lokale Koordinaten w, z von R_m und $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$, so dass $(f_1) = (w^a z^b)$, $(f_2) = (w^c z^d)$. Ist $V(JR_m) \subset \operatorname{Spec} R_m$ kein snc-Divisor, so gilt $t_m = (a-c)(b-d) < 0$. Zeige mittels Betrachtung dieser t_m, dass für hinreichend großes n das Unterschema $V(JR_n)$ von $\operatorname{Spec} R_n$ ein snc-Divisor ist.

Aufgabe 4. *(Auflösung von Singularitäten für Flächen in positiver Charakteristik)*
Untersuche genau die in Kapitel 4 angewandten Methoden und zeige, dass die Argumentation über Körpern beliebiger Charakteristik nur an zwei Stellen Probleme aufwerfen kann. Folgere:

Sei V eine glatte dreidimensionale Fläche über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik $p > 0$ und $S \subset V$ eine Fläche. Ist $\operatorname{max-ord} S < p$, so bricht der Algorithmus 4.7 für $(V_0, S_0) = (V, S)$ nach endlich vielen Schritten mit einer glatten Fläche $S_n \subset V_n$ ab.