Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 5
zu bearbeiten bis Dienstag, 25.11.2014

Aufgabe 1. *(Weierstraß'scher Vorbereitungssatz)*
Sei k ein Körper und $f \in k[\![x_1, \ldots, x_n, z]\!]$ eine Potenzreihe mit $0 < r = \operatorname{ord}_{z=0} f(0, \ldots, 0, z) < \infty$. Zeige mit dem verallgemeinerten Hensel'schen Lemma den *Weierstraß'schen Vorbereitungssatz*:

Es gibt eine invertierbare Potenzreihe $u \in k[\![x_1, \ldots, x_n, z]\!]^\times$ und $a_1, \ldots, a_r \in k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$, so dass

$$f = u(z^r + a_1 z^{r-1} + \ldots + a_r).$$

Aufgabe 2. *(Formale Hyperfläche maximalen Kontakts)*
Sei W eine glatte Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0, $X \subset W$ eine Hyperfläche, $n = \dim X$, $r = \text{max-ord}\, X$ und $p \in X$ mit $\operatorname{ord}_p X = r$. Zeige:

(a) Es gibt es formale lokale Koordinaten[1] $x_1, \ldots, x_n, z$ von $\hat{O}_{W,p}$, so dass

$$\hat{O}_{X,p} \cong k[\![x_1, \ldots, x_n, z]\!]/(z^r + b_2 z^{r-2} + \ldots + b_r)$$

mit Potenzreihen $b_2, \ldots, b_r \in k[\![x_1, \ldots, x_n]\!]$. Für $\mu_p := \min\{\frac{\operatorname{ord} b_i}{i} \mid i = 2, \ldots, r\}$ gilt $\mu_p \geq 1$.

(b) Für $H = V(z) \subset \hat{X}_p$ gilt $\operatorname{Sing}_r(\hat{X}_p) \subset H$. Ist $\pi\colon W' \to \hat{W}_p$ eine Aufblasung mit glattem Zentrum $Z \subset \operatorname{Sing}_r(\hat{X}_p)$, $E = \pi^{-1}(Z)$ und $X' \subset W'$ die strikte Transformierte von $\hat{X}_p$, so liegt $\operatorname{Sing}_r(X') \cap E$ in der strikten Transformierten H' von H in W'.

Aufgabe 3. *(Formale Kurve maximalen Kontakts)*
Sei W eine glatte Fläche über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0, $X \subset W$ eine eingebettete Kurve und $p \in X$ ein Punkt mit $\operatorname{ord}_p X = \text{max-ord}\, X =: r$. Nach Aufgabe 2 gibt es formale lokale Koordinaten x, z von $\hat{O}_{W,p}$, so dass $\hat{O}_{X,p} = \hat{O}_{W,p}/(f)$ mit

$$f = z^r + b_2 z^{r-2} + \ldots + b_r, \qquad b_2, \ldots, b_r \in k[\![x]\!].$$

Sei $\pi : \tilde{W} \to W$ die Aufblasung von W in p und $\tilde{X}$ die strikte Transformierte von X in $\tilde{W}$. Zeige: Ist $q \in \pi^{-1}(p)$, so hat $\hat{\mathcal{O}}_{\tilde{W},q}$ formale lokale Koordinaten x_1, z_1, so dass entweder $x = x_1 z_1$, $z = z_1$ oder $x = x_1$, $z = x_1(z_1 + \alpha)$ mit $\alpha \in k$. Im ersten Fall gilt $q \notin \tilde{X}$, im zweiten hat $\hat{O}_{\tilde{X},q}$ die Form $\hat{O}_{\tilde{W},q}/(f_1)$ mit

$$f_1 = (z_1 + \alpha)^r + \frac{b_2}{x^2}(z_1 + \alpha)^{r-2} + \ldots + \frac{b_r}{x^r}.$$

Folgere: Für jeden Punkt $q \in \pi^{-1}(p)$ gilt $\operatorname{ord}_q \tilde{X} \leq r$, und für höchstens einen gilt Gleichheit (welchen?). Zeige zudem: Bläst man rekursiv stets in einem Punkt der Ordnung r im Urbild von p auf, so erhält man nach $\lfloor \mu_p \rfloor$ (s.o.) Schritten einen birationalen Morphismus $W' \to W$, so dass die birationale Transformierte X' von X in W in jedem Punkt im Urbild von p Ordnung $< r$ hat.

Aufgabe 4. *(Formale Fläche maximalen Kontakts)*
Sei W eine glatte dreidimensionale Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik 0, $X \subset W$ eine Fläche und $r = \text{max-ord}\, X$. Sei $\pi : \tilde{W} \to W$ die Aufblasung entlang

(a) einer irreduziblen glatten Kurve $C \subset \operatorname{Sing}_r(X)$,

(b) eines abgeschlossenen Punktes $p \in \operatorname{Sing}_r(X)$.

Sei $\tilde{X}$ die strikte Transformierte von X in $\tilde{W}$ und E der exzeptionelle Divisor von π. Zeige mit den Methoden aus Aufgabe 3: In beiden Fällen ist $\operatorname{Sing}_r(\tilde{X}) \cap E$ entweder eine glatte Kurve oder eine endliche Menge von abgeschlossenen Punkten. Ist im Fall (a) $\operatorname{Sing}_r(\tilde{X}) \cap E = C'$ selbst eine Kurve, so bildet π die Kurve C' isomorph auf C ab.

---

[1] d. h. ein reguläres System von Parametern des Maximalideals von $\hat{O}_{W,p}$