Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 3
zu bearbeiten bis Dienstag, 11.11.2014

Aufgabe 1. *(Eingebettete Auflösung von Singuläritäten für die Spitzenkurve)*
Sei $X_0 = V(y^2 - x^3) \subset A_k^2 = W_0$. Verfahre rekursiv wie folgt: Bestimme einen abgeschlossenen singulären Punkt p_i in X_i. Dann sei $\pi_i : W_{i+1} \to W_i$ die Aufblasung von W_i in p_i und $X_{i+1} = \pi_i^{-1}(X_i)$ die totale Transformierte von X_i unter π_i. Zeige: Nach drei Schritten erhält man einen Divisor $X_3 \subset W_3$ mit normalen Überkreuzungen. Schreibe X_3 als Linearkombination von Primdivisoren und vergleiche die Koeffizienten mit den Multiplizitäten der X_i bei p_i, $i = 0, 1, 2$.

Aufgabe 2. *(Verhalten von snc-Divisoren unter Aufblasungen)*
Sei W ein nicht-singuläres noethersches Schema, D ein snc-Divisor auf W und $Z \subset W$ ein abgeschlossenes Unterschema, das einfache normale Überkreuzungen mit D hat. Sei $\pi : \tilde{W} \to W$ die Aufblasung von W entlang Z. Zeige: Dann ist $\pi^{-1}(D)$ ein snc-Divisor.

In den folgenden beiden Aufgaben sei W eine zusammenhängende nicht-singuläre Varietät über einem Körper k und $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_W$ eine Idealgarbe auf W. Zudem sei $p \in W$ ein beliebiger abgeschlossener Punkt und $x_1, \ldots, x_n$ ein reguläres System von Parametern für das Maximalideal $\mathfrak{m}_p \subset \mathcal{O}_{W,p}$.
Zur Erinnerung: Eine k-Derivation $d : \mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_W$ ist ein Homorphismus von Garben abelscher Gruppen mit der Eigenschaft, dass $d(ab) = adb + bda$ für beliebige $a, b \in \mathcal{O}_W(U)$, $U \subset W$ offen, und $dc = 0$ für $c \in k$. Im lokalen Ring $\mathcal{O}_{W,p}$ so gibt es zu jedem $f \in \mathcal{O}_{W,p}$ eindeutig bestimmte $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in \mathcal{O}_{W,p}$, so dass

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n$$

für jede k-Derivation $d : \mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_W$.

Aufgabe 3. *(Abgeleitete Idealgarben)*
Seien $W, k, \mathcal{I}, p$ und $x_1, \ldots, x_n$ wie oben. Mit $D(\mathcal{I})$ bezeichnen wir die Idealgarbe, die von allen Bildern von $\mathcal{I}$ unter k-Derivationen $d : \mathcal{O}_W \to \mathcal{O}_W$ erzeugt wird. Weiterhin definiere man durch

$$D^0(\mathcal{I}) = \mathcal{I} \quad \text{und} \quad D^i(\mathcal{I}) = D(D^{i-1}(\mathcal{I})) \text{ für } i \geq 1$$

die höheren Ableitungen von $\mathcal{I}$. Zeige: Gilt $\mathcal{I}\mathcal{O}_{W,p} = (f_1, \ldots, f_r)$, so wird $D(\mathcal{I})$ lokal bei p von den f_i und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ erzeugt. Insbesondere gilt

$$\mathcal{I} = D^0(\mathcal{I}) \subset D^1(\mathcal{I}) \subset D^2(\mathcal{I}) \subset \ldots$$

Folgere: Jedes $D^m(\mathcal{I})$, $m \in \mathbb{N}_0$, ist von allen höheren Ableitungen $\frac{\partial^I f_i}{\partial x^I}$ mit $I = (i_1, \ldots, i_n)$, $|I| \leq m$, erzeugt. Gilt zudem $\operatorname{char}(k) = 0$, so folgt $D^m(\mathcal{I}) = \mathcal{O}_W$ für $m \gg 0$.

Aufgabe 4. *(Oberhalbstetigkeit der Ordnung)*
Seien $W, k, \mathcal{I}$ wie oben. Wir nehmen zudem an, dass k Charakteristik 0 besitzt und $\mathcal{I}$ nicht verschwindet. Zeige: Mit den Notationen aus Aufgabe 3 gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$\{w \in W \,|\, \operatorname{ord}_w \mathcal{I} > m\} = V(D^m(\mathcal{I})).$$

Insbesondere ist die Funktion $\nu_{\mathcal{I}} : W \to \mathbb{N}_0$ oberhalbstetig.
Hinweis. Für einen Punkt $w \in W$ wähle man einen abgeschlossenen Punkt $p \in Y := \overline{\{w\}}$, so dass Y bei p nicht-singulär ist. Dann finde man mit Lemma 2.12 ein besonders geeignetes reguläres System von Parametern bei p und zeige mit Aufgabe 3, dass $\operatorname{ord}_w \mathcal{I} > m \Leftrightarrow w \in V(D^m(\mathcal{I}))$.
Zusatzaufgabe. Man definiere die Funktoren D^i so um, dass obige Aussage über jedem perfekten Körper richtig ist.