Auflösung von Singularitäten

Wintersemester 2014/15

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 1
zu bearbeiten bis Dienstag, 28.10.2014

Aufgabe 1. *(Aufblasungen einer Quadrik)*
Sei k ein Körper und X die Quadrik $V(xw-yz) \subset \operatorname{Spec} k[x,y,z,w] = \mathbb{A}^4_k$. Seien $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ und $\tilde{X}_3$ die Aufblasungen von X entlang der abgeschlossenen Untervarietäten $Y_1 = V(x,y,z,w)$, $Y_2 = V(x,y)$ und $Y_3 = V(x,z) \subset X$.

(a) Beschreibe die $\tilde{X}_i$ durch affine Überdeckungen und zeige, dass X singulär, aber jedes der $\tilde{X}_i$ nicht-singulär ist.

(b) Zeige: $\tilde{X}_2$ und $\tilde{X}_3$ sind als Schemata isomorph, aber nicht als X-Schemata.

Aufgabe 2. *(Auflösung von Singularitäten per Quick-and-Dirty-Methode)*
Sei k ein Körper und $X = \operatorname{Spec} A$ mit $A = k[x,y]/(y^2 - x^5)$. Bestimme ein monomiales Ideal[1] $I \subset A$, so dass die Aufblasung von X entlang I nicht-singulär ist.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, entweder die Auflösung von Singularitäten durch zweimaliges Aufblasen im Ursprung oder die Parametrisierung der Kurve X durch $x = t^2, y = t^5$ genauer zu untersuchen.

Zusatzaufgabe:* Zeige, dass es nur drei verschiedene Isomorphietypen von Aufblasungen an monomialen Idealen gibt, und gib unter Benutzung der Gradfunktion $\deg(x^i y^j) = 2i + 5j$ ein Kriterium an, zu welchem Typ von Aufblasungen ein monomiales Ideal führt.

Aufgabe 3. *(Kommutatorregel für Aufblasungen)*
Sei X ein noethersches Schema und $Y_1 = V(\mathcal{I}_1), Y_2 = V(\mathcal{I}_2)$ zwei abschlossene Unterschemata. Für $i = 1,2$ sei $\pi_i : \tilde{X}_i \to X$ die Aufblasung von X entlang Y_i. Nun bezeichne $\pi_1^{-1}(Y_2)$ das abgeschlossene Unterschema von $\tilde{X}_1$, welches durch die Idealgarbe $\pi_1^{-1}\mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_1}$ gegeben ist; analog definiere man $\pi_2^{-1}(Y_1)$. Zeige, dass die beiden Schemata $\tilde{X}_{12} = \operatorname{Bl}_{\pi_1^{-1}(Y_2)} X_1$ und $\tilde{X}_{21} = \operatorname{Bl}_{\pi_2^{-1}(Y_1)} X_2$ als X-Schemata eindeutig isomorph sind.

Aufgabe 4. *(Aufblasungen und reguläre Folgen)*
Sei A ein noetherscher Ring. Eine Folge $f_1, \ldots, f_n$ von Elementen in A heißt *regulär*, wenn $(f_1, \ldots, f_n)$ ein echtes Ideal in A und für jedes $i = 1, \ldots, n$ das Bild von f_i in $A/(f_1, \ldots, f_{i-1})$ kein Nullteiler ist. Zeige: Ist $f_1, \ldots, f_n$ eine reguläre Folge in A und $I = (f_1, \ldots, f_n)$, so ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A[T_1, \ldots, T_n]/(f_i T_j - f_j T_i)_{1 \le i,j \le n} & \longrightarrow & \tilde{A} = \bigoplus_{d \ge 0} I^d \\ T_i & \longmapsto & t_i = (f_i \text{ im Grad } 1) \end{array}$$

ein Algebrenisomorphismus.

Hinweis: Sei P ein homogenes Polynom im Kern $\mathfrak{a}$ der Abbildung $A[T_1, \ldots, T_n] \to \tilde{A}$, $T_i \mapsto t_i$. Zeige per Induktion über n: Es gibt homogene Polynome $P', Q_2, \ldots, Q_n \in A[T_1, \ldots, T_n]$ sowie ein homogenes Polynom $R \in (f_i T_j - f_j T_i)_{2 \le i,j \le n} \subset A[T_2, \ldots, T_n]$, so dass

$$P = R + T_1 P' + \sum_{i=2}^{n} (f_1 T_i - f_i T_1) Q_i.$$

Man folgere, dass P' ebenfalls in $\mathfrak{a}$ liegt, und benutze nun Induktion über den Grad von P.

[1] d. h. ein Ideal, das von Monomen der Form $x^i y^j$ erzeugt ist