Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 12
zu bearbeiten bis Dienstag, 28.01.2014

Aufgabe 1. *(Definitionskörper)*
Sei $L|\mathbb{C}(T)$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G und k ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. Wir sagen, $L|\mathbb{C}(T)$ ist *definiert über* k, wenn es einen Unterkörper $L_k \subset L$ mit gibt, der galoissch über $k(T)$ und *regulär über* k (d. h. k ist algebraisch abgeschlossen in L_k) ist und $[L_k : k(T)] = [L : \mathbb{C}(T)]$ erfüllt. Zeigen Sie: In diesem Fall gilt kanonisch $\mathrm{Gal}(L_k|k(T)) \cong G$. Ist k algebraisch abgeschlossen oder hat G triviales Zentrum, so L_k eindeutig bestimmt.

In den beiden folgenden Aufgaben wollen wir folgenden Satz (ohne Beweis) benutzen:
Ist $L|\mathbb{C}(T)$ eine endliche Galoiserweiterung und $k \subset \mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so dass die Menge P der in L verzweigten Stellen von $\mathbb{C}(T)$ bereits in $\mathbb{P}^1_k \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ liegt, so ist L über k definiert.

Aufgabe 2. *(Rationales Rigiditätskriterium)*
Ein Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$ heißt *rational*, wenn $P \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ und für jede Konjugationsklasse $C \in \mathcal{C}$ gilt: $C^m = C$ für alle m teilerfremd zu $\operatorname{ord} G$, d. h. liegt c in C, so auch jedes c^m mit $\mathrm{ggT}(m, \operatorname{ord} G) = 1$. Zeigen Sie:
Jede rationale, rigide Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$ ist Verzweigungstyp einer (eindeutig bestimmten) Galoiserweiterung $L|\bar{\mathbb{Q}}(T)$, die über $\mathbb{Q}$ definiert ist. Insbesondere ist G Galoisgruppe einer $\mathbb{Q}$-regulären Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}(T)$.

Hinweis. Man starte mit einer Galoiserweiterung $L|\bar{\mathbb{Q}}(T)$ mit Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$, setze $\Gamma = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}(T))$ und $\bar{\Gamma} = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}(T)|\mathbb{Q}(T)) \cong \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ und betrachte die exakte Folge

$$1 \to G \to \Gamma \to \bar{\Gamma} \to 1.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $\gamma \in \Gamma$ der Automorphismus $\gamma^* : G \to G$, $h \mapsto \gamma h \gamma^{-1}$, ein innerer Automorphismus g_γ^* für ein eindeutig bestimmtes $g_\gamma \in G$ ist. Die Zuordnung $\gamma \mapsto g_\gamma$ definiert einen Homomorphismus $\sigma : \Gamma \to G$, der obige exakte Folge spaltet. Folgern Sie, dass die Erweiterung bereits über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

Aufgabe 3. *(Rigiditätskriterium über $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$)*
Sei $k \subset \mathbb{C}$ ein Körper, der alle Einheitswurzeln enthält (mit anderen Worten: k enthält die maximale abelsche Erweiterung $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ von $\mathbb{Q}$). Sei $[G, P, \mathcal{C}]$ ein rigider Verzweigungstyp mit $P \subset k \cup \{\infty\}$ und $L|\mathbb{C}(T)$ die zugehörige Galoiserweiterung. Zeigen Sie: Die Erweiterung ist über k definiert. Insbesondere ist G Galoisgruppe einer k-regulären Galoiserweiterung von $k(T)$.

Aufgabe 4. *(Anwendung des rationalen Rigiditätskriteriums)*
Sei $C^{(i)}$ die Menge der der i-Zykel in der symmterischen Gruppe S_n, $n \geq 3$. Zeigen Sie: $C^{(2)}$, $C^{(n-1)}$ und $C^{(n)}$ bilden ein rigides Tripel in S_n. Folgern Sie, dass S_n Galoisgruppe einer Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}(T)$ ist.

Anmerkung: Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$ *hilbertsch* sind, kann man für G wie in Aufgabe 2 (bzw. 3) durch Einsetzen geeigneter Werte für T erreichen, dass G als Galoisgruppe über $\mathbb{Q}$ (bzw. $\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}$) dargestellt werden kann. Weitere Aussagen in dieser Richtung findet man z.B. in Völkleins Lehrbuch *Groups as Galois Groups* oder Serres Vorlesung *Topics in Galois Theory.*