Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 11
zu bearbeiten bis Dienstag, 21.01.2014

Aufgabe 1. *(Ausgezeichnete Konjugationsklassen)*

(a) Sei $\phi : Y \to X$ eine verzweigte Galoisüberlagerung kompakter Riemannscher Flächen mit Galoisgruppe G. Zeigen Sie: Ist $y \in Y$ ein Punkt mit ausgezeichnetem Element g_y und h ein Element in G, so hat der Punkt hy das ausgezeichnete Element $g_{hy} = hg_yh^{-1}$. Insbesondere lässt sich jedem $x \in X$ eine Konjugationsklasse $C_x \subset G$ zuordnen, die gerade aus allen ausgezeichneten Elementen von Punkten in $\phi^{-1}(x)$ besteht.

(b) Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ ein Tupel von Konjugationsklassen von Elementen in G. Wir nennen $\mathcal{C}$ *ausgezeichnet*, wenn es $1 \neq g_i \in C_i, i = 1, \ldots, r$ gibt, die G erzeugen und $g_1 \cdots g_r = 1$ erfüllen (wir nennen dann $(g_1, \ldots, g_r)$ ein *ausgezeichnetes Tupel* zu $\mathcal{C}$). Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft invariant unter Permutationen der C_i ist.

Aufgabe 2. *(Ausgezeichnete Elemente für galoissche Körpererweiterungen)*
Sei $k \subset \mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $L|k(T)$ eine endliche Galoiserweiterung über dem rationalen Funktionenkörper über k mit Galoisgruppe G und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_L$ der Ganzabschluss von $k[T]$ in L. Zeigen Sie:

(a) Sei $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ ein Primideal und $G_\mathfrak{p} = \{\sigma \in G \mid \sigma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$. Ist $\pi \in \mathcal{O}$ eine Uniformisierende zu $\mathfrak{p}$ (d. h. ein Element mit $\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}_\mathfrak{p}$), so liefert die Abbildung

$$\sigma \mapsto \overline{\left(\frac{\sigma\pi}{\pi}\right)} \in \kappa(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\mathcal{O}_\mathfrak{p} = k$$

einen Isomorphismus α von $G_\mathfrak{p}$ auf die Gruppe μ_e der e-ten Einheitswurzeln, $e = \#G_\mathfrak{p}$. Das Element $g_\mathfrak{p} \in G_\mathfrak{p}$ mit $\alpha(g_\mathfrak{p}) = \exp(\frac{2\pi i}{e})$ heißt *ausgezeichnetes Element* zu $\mathfrak{p}$.

(b) Wir setzen formal $\mathbb{P}^1_k = k \cup \{\infty\}$. Für ein beliebiges $x \in k$ wähle man ein Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}$ mit $\mathfrak{p} \cap k[T] = (T - x)$ und definiere C_x als Konjugationsklasse des ausgezeichneten Elements $g_\mathfrak{p}$ sowie $e_x := \#G_\mathfrak{p}$; für $x = \infty$ verfahre man analog mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ über $(T^{-1}) \subset k[T^{-1}]$. Zeigen Sie: Diese Zuordnungen sind wohldefiniert. x heißt *verzweigt*, wenn $e_x > 1$.

Ist $k = \mathbb{C}$ und $L|\mathbb{C}(T)$ die Funktionenkörpererweiterung zu einer verzweigten Galoisüberlagerung $Y \to \overline{\mathbb{C}}$, so stimmen Konjugationsklasse C_x und Verzweigungsindex e_x zu $x \in \mathbb{P}^1_\mathbb{C} = \overline{\mathbb{C}}$ mit den entsprechenden geometrischen Begriffen überein.

Aufgabe 3. *(Algebraische Version des Riemannschen Existenzsatzes)*
Sei G eine endliche Gruppe, $k \subset \mathbb{C}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $P \subset \mathbb{P}^1_k$ eine endliche Teilmenge und $\mathcal{C} = (C_p)_{p \in P}$ eine Familie von Konjugationsklassen von Elementen in G. Wir nennen zwei Tupel $(G, P, \mathcal{C})$ und $(G', P, \mathcal{C}')$ äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : G \to G'$ gibt, so dass $\varphi(C_p) = C'_p$ für alle $p \in P$. Äquivalenzklassen $[G, P, \mathcal{C}]$ von solchen Tupeln bezeichnen wir als *Verzweigungstypen*. Zeigen Sie:

(a) Sei $L|k(T)$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe G. Dann ist die Menge $P \subset \mathbb{P}^1_k$ der in L verzweigten Stellen endlich. Wir ordnen $L|k(T)$ den Verzweigungstyp $[G, P, (C_p)_{p \in P}]$ zu, wobei die C_p wie in Aufgabe 2 definiert sind. Diese Zuordnung ist wohldefiniert.

(b) Im Fall $k = \mathbb{C}$ ist ein Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$ genau dann der Verzweigungstyp einer endlichen Galoiserweiterung $L|\mathbb{C}(T)$, wenn $\mathcal{C}$ ausgezeichnet ist.

Aufgabe 4. *((Schwach) Rigide Verzweigungstypen)*
Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ ein Tupel von Konjugationsklassen in G. $\mathcal{C}$ heißt *rigide* (bzw. *schwach rigide*), wenn es ausgezeichnet ist und zu je zwei ausgezeichneten Tupeln $(g_1, \ldots, g_r)$ und $(g_1', \ldots, g_r')$ zu $\mathcal{C}$ ein eindeutiges Element $g \in G$ mit $gg_ig^{-1} = g_i' \ \forall\ i$ (bzw. ein Automorphismus $\gamma : G \to G$ mit $\gamma(g_i) = g_i' \ \forall\ i$) existiert. Auch diese Eigenschaften hängen nicht von der Anordnung der C_i ab. Ein Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$ heißt *(schwach) rigide*, wenn $\mathcal{C}$ (schwach) rigide ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{C}$ rigide, so hat G triviales Zentrum, und jeder Automorphismus $\gamma : G \to G$ mit $\gamma(C_i) = C_i \ \forall\ i$ ist ein innerer.

(b) Für jeden schwach rigiden Verzweigungstyp $[G, P, \mathcal{C}]$ gibt es genau eine endliche Galoiserweiterung $L|\mathbb{C}(T)$ von diesem Typ.

    Hinweis. Seien L_1, L_2 zwei endliche Galoiserweiterungen von diesem Typ. Man wähle eine endliche Galoiserweiterung $M|\mathbb{C}(T)$ mit $L_1, L_2 \subset M$ und betrachte ein ausgezeichnetes Tupel $(h_1, \ldots, h_r)$ zu M und dessen Bilder unter den Projektionen $\pi_i : H = \mathrm{Gal}(M|\mathbb{C}(X)) \to G_i = \mathrm{Gal}(L_i|\mathbb{C}(X))$, $i = 1, 2$. Folgern Sie, dass $\pi_2 = \gamma \circ \pi_1$ mit einem Isomorphismus $\gamma : G_1 \to G_2$, und schließen Sie, dass $\ker \pi_1 = \ker \pi_2$.