Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 10
zu bearbeiten bis Dienstag, 14.01.2014

Aufgabe 1. *(Automorphismen einer elliptischen Kurve)*
Sei $X = \mathbb{C}/\Lambda$ die elliptische Kurve zu einem Gitter $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \subset \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus ϕ von E durch einen Automorphismus ψ von $\mathbb{C}$ mit $\psi(\Lambda) \subseteq b + \Lambda$ für ein $b \in \mathbb{C}$ induziert wird. Folgern Sie, dass $\operatorname{Aut}(E) \cong \mathbb{C}/\Lambda \rtimes \mu_n$, wobei $\mathbb{C}/\Lambda$ die Faktorgruppenstruktur trägt und μ_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln (mit $n \in \{2, 4, 6\}$) ist. Bestimmen Sie n in Abhängigkeit von Λ bzw. τ.

Aufgabe 2. *(Isogenien als Äquivalenzrelation)*
Sei $X = \mathbb{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die durch die Multiplikation mit n auf $\mathbb{C}$ induzierte Abbildung $X \xrightarrow{\cdot n} X$ ist eine unverzweigte Galoisüberlagerung vom Grad n^2 mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Folgern Sie: Ist $\phi : Y \to X$ eine Isogenie elliptischer Kurven vom Grad n, so gibt es auch eine Isogenie $\psi : X \to Y$ vom Grad n, so dass $\psi \circ \phi : Y \to Y$ und $\phi \circ \psi : X \to X$ jeweils die Multiplikation mit n ist. Insbesondere erhält man mit der Definition „Y isogen zu $X \Leftrightarrow$ es gibt eine Isogenie $Y \to X$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der elliptischen Kurven.

Aufgabe 3. *(Automorphismen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht ≥ 2)*
Sei Y eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g_Y \geq 2$. Man kann zeigen, dass die Gruppe $G = \operatorname{Aut}(Y)$ der Automorphismen von Y endlich ist. Davon ausgehend wollen wir $n = \#G$ nach oben beschränken. Dazu betrachten wir die verzweigte Überlagerung $p : Y \to X := G\backslash Y$ aus Aufgabe 3 von Blatt 7. Zeigen Sie:

(a) Für jeden Punkt $x \in X$ hängt der Verzweigungsindex $e(y|x)$ von p bei $y \in p^{-1}(\{x\})$ nicht von der Wahl von y ab; wir sprechen daher auch von dem Verzweigungsindex bei x. Sind $x_1, \ldots, x_s$ die in p verzweigten Punkte von X und $r_1, \ldots, r_s$ die zugehörigen Verzweigungsindizes, so folgt
$$\frac{2g_Y - 2}{n} = 2g_X - 2 + \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{r_i}\right).$$

(b) Betrachten wir den Term auf der rechten Seite obiger Gleichung als formalen Ausdruck in $g_X, r_1, \ldots, r_s$ und variieren g_X und s in $\mathbb{N}_0$ und $r_1, \ldots, r_s$ in $\mathbb{N}$. Zeigen Sie: Der kleinste positive Wert, den die rechte Seite annehmen kann, ist $\frac{1}{42}$. Folgern Sie: Y hat höchstens $84(g_Y - 1)$ Automorphismen.

Aufgabe 4. *(Algebraische und analytische Version einer elliptischen Kurve)*
Wir betrachten noch einmal die elliptische Kurve $E = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Aut}(E)$ unendlich ist und dass die Untergruppe $\operatorname{Aut}_O(E)$ der Automorphismen mit Fixpunkt O Ordnung 4 hat. Folgern Sie, dass die zugehörige Riemannsche Fläche tatsächlich eine elliptische Kurve/Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ ist, und bestimmen Sie Λ (bis auf Isomorphie).