Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 8
zu bearbeiten bis Dienstag, 17.12.2013

Aufgabe 1. *($\mathbb{C}$ und $\overline{\mathbb{C}}$ als universelle Überlagerungen)*
Welche Untergruppen von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ und $\mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ wirken frei und eigentlich diskontinuierlich? Folgern Sie: $\mathbb{C}$ ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ und elliptischen Kurven (Tori) $\mathbb{C}/\Lambda$ für eine diskrete freie abelsche Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ vom Rang 2; die einzige Riemannsche Fläche mit universeller Überlagerung $\overline{\mathbb{C}}$ ist $\overline{\mathbb{C}}$ selbst.

Aufgabe 2. *(Liouville'sche Sätze aus Überlagerungssicht)*
Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ eine diskrete freie abelsche Untergruppe vom Rang 2. Beweisen Sie durch die Anwendung der Sätze aus Vorlesung auf holomorphe Abbildungen $\mathbb{C}/\Lambda \to \overline{\mathbb{C}}$ folgende Sätze:

(a) (1. Liouville'scher Satz) Jede holomorphe elliptische Funktion zum Gitter Λ ist konstant.

(b) (Korollar aus dem 2. Liouville'schen Satz) Es gibt keine meromorphe elliptische Funktion zum Gitter Λ der Ordnung 1.

(c) (3. Liouville'scher Satz) Jede nicht-konstante elliptische Funktion zum Gitter Λ nimmt auf $\mathbb{C}/\Lambda$ jeden Wert gleich oft an, wobei die Werte mit ihren Vielfachheiten zu rechnen sind.

Wie lauten passende Verallgemeinerungen für beliebige kompakte Riemannsche Flächen?

Aufgabe 3. *(Bewertungen auf Riemannschen Flächen)*
Sei X eine Riemannsche Fläche. Zu einem Punkt P und einer meromorphen Funktion $f \in \mathcal{M}(X)$ definieren wir die (Nullstellen-)Ordnung $\mathrm{ord}_P(f)$ von f bei P durch $\mathrm{ord}_P(f) := \mathrm{ord}_{g(P)}(f \circ g^{-1})$ für eine beliebige Karte $g : U \to \mathbb{C}$ mit $P \in U$. Zeigen Sie:

(a) Die Ordnung ord_P ist wohldefiniert und liefert eine diskrete Bewertung auf $\mathcal{M}(X)|\mathbb{C}$. Der diskrete Bewertungsring zu ord_P ist der Ring $\mathcal{O}_{X,P} = \{f \in \mathcal{M}(X) \mid f \text{ holomorph bei } P\}$.

(b) Zwei verschiedene Punkte P, Q haben unterschiedliche diskrete Bewertungen $\mathrm{ord}_P, \mathrm{ord}_Q$.

Aufgabe 4. *(Vergleich von normalen projektiven Kurven und kompakten Riemannschen Flächen)*
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Zeigen Sie: Jede normalisierte diskrete Bewertung auf $\mathcal{M}(X)|\mathbb{C}$ ist von der Form ord_P für ein (eindeutig bestimmtes) $P \in X$.

Folgern Sie: Bezeichnen wir mit X^{alg} die Menge X mit der koendlichen Topologie (d. h. die abgeschlossenen Teilmengen von X^{alg} sind die ganze Menge und alle endlichen Teilmengen) und definieren auf X^{alg} ein Strukturgarbe $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}}$ durch $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{alg}}}(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{X,P}$ für $U \subset X^{\mathrm{alg}}$ offen, so ist X^{alg} eine (die) normale projektive algebraische Kurve mit $K(X^{\mathrm{alg}}) = \mathcal{M}(X)$.

Schließen Sie: Die „Algebraisierung“ $X \mapsto X^{\mathrm{alg}}$ ist invers zu der „Analytifizierung“ $Y \mapsto Y^{\mathrm{an}}$ einer normalen algebraischen Kurve aus Aufgabe 3 von Blatt 6.