Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 6
zu bearbeiten bis Dienstag, 03.12.2013

Aufgabe 1. *(Verzweigung)*
Sei $\phi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus zwischen normalen projektiven Kurven, und sei $V \subset Y$ eine offene affine Teilmenge. Aus Aufgabe 2 vom letzten Blatt wissen wir, dass auch $\phi^{-1}(V) \subset X$ eine offene affine Teilmenge und $B = \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(V))$ ein endlicher $A = \mathcal{O}_Y(V)$-Modul ist.

Ein Punkt $Q \in V$ heißt *unverzweigt* in $\phi^{-1}(V)$, wenn $B \otimes A/\mathfrak{m}_Q$ als Algebra ein endliches Produkt von Kopien von $\mathbb{C}$ ist. Ein Punkt $Q \in Y$ heißt unverzweigt in X, wenn eine offene affine Umgebung $\tilde{V}$ von Q existiert, so dass Q unverzweigt in $\phi^{-1}(\tilde{V})$ ist. Zeigen Sie:

(a) Die Definition von Unverzweigtheit ist wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der offenen affinen Umgebung des Punktes.

(b) Die Menge der unverzweigten Punkte von Y ist offen und nicht-leer.

Hinweis: Benutzen Sie Ihre Kenntnisse über Erweiterungen von Dedekindringen.

Aufgabe 2. *(Verzweigungsindex)*
Sei $\phi : X \to Y$ ein dominanter Morphismus zwischen normalen projektiven Kurven. Sei $P \in X$ ein Punkt mit Bild $Q = \phi(P)$, und seien $v_P : K(X)^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ und $v_Q : K(Y)^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ die normalisierten diskreten Bewertungen zu P und Q. Der *Verzweigungsindex* von P über Q ist die natürliche Zahl $e(P|Q)$ mit

$$v_P(\phi^*(K(Y)^\times)) = e(P|Q)\mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie: Für jedes $Q \in Y$ gilt

$$\sum_{P \in X : \phi(P) = Q} e(P|Q) = [K(X) : K(Y)],$$

und Q ist genau dann unverzweigt in X, wenn $e(P|Q) = 1$ für alle $P \in X$ mit $\phi(P) = Q$.

Aufgabe 3. *(Normale algebraische Kurven als Riemannsche Flächen)*
Zeigen Sie, dass jede normale algebraische Kurve eine komplexe Struktur zulässt, d. h. mit einer Hausdorff-Topologie und einem komplexen Atlas versehen werden kann.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 vom letzten Blatt und die Beispiele aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. *(Automorphismen von $\overline{\mathbb{C}}$)*
Zeigen Sie: Jeder Automorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$ ist von der Form

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{mit} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C}).$$