Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 5
zu bearbeiten bis Dienstag, 26.11.2013

Aufgabe 1. *(Regularität und Glattheit)*
Sei $P \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{m}_P \subset \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ das zugehörige Maximalideal.

(a) Zeigen Sie: Die lineare Abbildung $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{C}^n$, $f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial X_n}(P)\right)$, induziert einen Isomorphismus $\theta : \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \to \mathbb{C}^n$.

(b) Sei $Y \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Teilmenge mit P, und sei $I(Y) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Zeigen Sie: Der Rang der *Jacobi-Matrix* $J_P = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{i,j}$ bei P ist gleich der Dimension von $(I(Y) + \mathfrak{m}_P^2)/\mathfrak{m}_P^2$ (und insbesondere unabhängig von der Wahl der f_i). Folgern Sie: Für das Maximalideal $\bar{\mathfrak{m}}_P$ von P in $\mathcal{O}(Y)$ gilt:
$$\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}_P/\bar{\mathfrak{m}}_P^2 + \mathrm{Rg}_{\mathbb{C}}\, J_P = n.$$

Anmerkung: Y heißt *nicht-singulär (oder glatt) bei* P, wenn $\mathrm{Rg}\, J_P = n - \dim Y$, und *regulär bei* P, wenn $\dim_{\mathbb{C}} \bar{\mathfrak{m}}_P/\bar{\mathfrak{m}}_P^2 = \dim Y$. Obige Aufgabe zeigt, dass eine affine Varietät genau dann regulär an einem Punkt ist, wenn sie dort nicht-singulär ist. Y heißt *nicht-singulär* bzw. *regulär*, wenn sie an jedem Punkt diese Eigenschaft besitzt. Wegen der Gleichwertigkeit von Regularität und Glattheit und der Unabhängigkeit des Regularitätsbegriffes von der affinen Einbettung dehnen sich diese Definitionen auch auf allgemeine Varietäten aus. Eine algebraische Kurve ist nach Satz 3.2 genau dann nicht-singulär, wenn sie normal ist.

Aufgabe 2. *(Endlichkeit der dominanten Morphismen von Kurven)*
Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ von Varietäten heißt *endlich*, wenn für jede offene affine Untervarietät $V \subset Y$ das Urbild $U = \phi^{-1}(V)$ ebenfalls affin und überdies $\mathcal{O}_X(U)$ ein endlicher $\mathcal{O}_Y(V)$-Modul ist. Zeigen Sie: Jeder dominante Morphismus zwischen normalen projektiven Kurven ist endlich.

Aufgabe 3. *(Lokale Beschreibung normaler Kurven durch ebene Kurven)*
Zeigen Sie: Jede normale Kurve lässt X sich lokal durch eine ebene glatte Kurve beschreiben, d. h. zu jedem Punkt $P \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von P und einen Morphismus $\phi : U \to Y = V(f) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ auf eine ebene Kurve, so dass $\phi : U \to \phi(U)$ ein Isomorphismus ist und $\phi(U)$ glatt bei $\phi(P)$ ist.

Hinweis: Wählen Sie ein $t \in K(X)$ ein Element mit $v_P(t) = 1$. Zeigen Sie: Es gibt ein $s \in \mathcal{O}_{X,P}^{\times}$ mit $K(X) = \mathbb{C}(t, s)$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Minimalpolynoms von s über $\mathbb{C}(t)$ ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{C}[S, T]$ mit $f(s, t) = 0$. Folgern Sie: Dies induziert eine birationale Abbildung $X \dashrightarrow V(f) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, die in einer Umgebung von P definiert und dort ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4*. *(Elliptische Kurve III)*[1]
Wir betrachten erneut die elliptische Kurve $E = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subset \mathbb{P}^2_C$. Zu einem Punkt $P_0 \in E$ sei $\alpha_{P_0} : E \to E$ der zugeordnete Automorphismus aus Aufgabe 4 vom letzten Übungsblatt. Weiterhin sei O der Punkt $(0 : 1 : 0) \in E$, und zu jedem Punkt $P = (x : y : z) \in E$ sei $-P$ der Punkt $\alpha_O(P) = (x : -y : z) \in E$. Zu zwei Punkten $P, Q \in E$ definieren wir
$$P + Q := -\alpha_P(Q) = \alpha_{-P}(-Q).$$
Zeigen Sie, dass E damit zu einer kommutativen Gruppe mit neutralem Element O wird.

[1] Für diese Aussagen dieser Aufgabe werden wir später einen einfacheren Zugang finden. Aufgaben 4 und 5 sollten daher als fakultativ angesehen werden.

Hinweis: Die einzige Aussage, die eines wirklichen Beweises bedarf, ist die Assoziativität der Addition. Es reicht zu zeigen, dass $\alpha_P \circ \alpha_{-R} = \alpha_R \circ \alpha_{-P}$ für beliebige $P, R \in E$. Betrachten Sie den Automorphismus $\beta = \alpha_{-P} \circ \alpha_R \circ \alpha_P \circ \alpha_{-R}$ von E und zeigen Sie, dass P, R, O und $P + R$ Fixpunkte von β sind. Folgern Sie für $\{P, R\} \not\subset \{(-1 : 0 : 1), (0 : 0 : 1), (1 : 0 : 1)\}$ mit Hilfe von Aufgabe 5, dass $\beta = \mathrm{id}_E$, also $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ für alle $Q \in E$. Die restlichen Fälle folgen z.B. durch Stetigkeitsargumente.

Aufgabe 5*. *(Elliptische Kurve IV)*
Sei $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 + x)$. Nach Aufgabe 3 von Blatt 4 ist A ein Dedekindring. Zeigen Sie, dass (x), $(x-1)$ und $(x+1)$ die einzigen Hauptideale in A sind, die Quadrate von Maximalidealen sind. Schließen Sie daraus, dass die Automorphismen von A gerade $\mathrm{id}_A, \eta, \eta^2 = \eta \circ \eta$ und $\eta^3 = \eta \circ \eta \circ \eta$ sind, wobei $\eta : A \to A$ durch $\eta(x) = -x, \eta(y) = iy$ gegeben ist.

Folgern Sie, dass ein nicht-trivialer Automorphismus von E mit Fixpunkt O höchstens die Punkte $(-1 : 0 : 1)$,$(0 : 0 : 1)$,$(1 : 0 : 1)$ als weitere Fixpunkte besitzt.

Hinweis: Für ein Element $f = g + hy \in A$ mit $g, h \in \mathbb{C}[x]$ setze man $\bar{f} = g - hy$. Dann gilt $f\bar{f} = g^2 - h^2(x^3 - x) \in \mathbb{C}[x]$, und g^2 ist ein gerades Polynom, während $h^2(x^3 - x)$ ungerade ist. Folgern Sie damit zunächst $A^\times = \mathbb{C}^\times$.

Ist nun $\mathfrak{m}_P = (x - x_P, y - y_P) \subset A$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{m}_P^2 = (f)$, so gilt für $\mathfrak{m}_{-P} = (x - x_P, y + y_P)$: $\mathfrak{m}_{-P}^2 = (\bar{f})$ und damit $((x - x_P)^2) = \mathfrak{m}_P^2 \mathfrak{m}_{-P}^2 = (g^2 - h^2(x^3 - x))$. Folgern Sie $h = 0$, also $\mathfrak{m}_P^2 = (g) = \mathfrak{m}_{-P}^2$, und schließen Sie $y_P = 0, x_P \in \{-1, 0, 1\}$. Ein Automorphismus φ von A überführt diese speziellen Hauptideale ineinander, es gilt also $\varphi(x) = \lambda(x + c) =: l(x)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, $c \in \{-1, 0, 1\}$ und $l(\{-1, 0, 1\}) = (\{-1, 0, 1\})$. Folgern Sie $c = 0, \lambda = \pm 1$.