Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 4
zu bearbeiten bis Dienstag, 19.11.2013

Aufgabe 1. *(Automorphismen von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$)*
Sei $A = (a_{ij})_{0\le i,j\le n} \in \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{C})$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_A : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \quad (z_0 : \ldots : z_n) \mapsto (a_{00}z_0 + \ldots + a_{0n}z_n : \ldots : a_{n0}z_0 + \ldots + a_{nn}z_n),$$

wohldefiniert und ein Automorphismus von $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Jeder Automorphismus von $\mathbb{P}^n$ lässt sich so darstellen. Insbesondere erhalten wir ein Isomorphie

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGl}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times.$$

Hierbei sei $\mathbb{C}^\times$ per $\lambda \mapsto \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ nach $\mathrm{Gl}_{n+1}(\mathbb{C})$ eingebettet.

Aufgabe 2. *(Produkt von Abbildungen)*
Sei X eine Varietät und $\phi_1 : X \to Z_1 \subset \mathbb{P}^{n_1}_{\mathbb{C}}$, $\phi_2 : X \to Z_2 \subset \mathbb{P}^{n_2}_{\mathbb{C}}$ zwei dominante Morphismen auf projektive Varietäten Z_1, Z_2. Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : X \xrightarrow{(\phi_1,\phi_2)} \mathbb{P}^{n_1}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^{n_2}_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{P}^{(n_1+1)(n_2+1)-1}_{\mathbb{C}},$$

wobei letztere Abbildung durch

$$((w_0 : \ldots : w_{n_1}), (z_0 : \ldots : z_{n_2})) \mapsto (w_0z_0 : w_0z_1 : \ldots : w_0z_{n_2} : w_1z_0 : \ldots : w_{n_1}z_{n_2})$$

gegeben ist. Sei $Z = \overline{\phi(X)}$. Zeigen Sie:

(a) ϕ ist ein Morphismus, und ϕ_1, ϕ_2 faktorisieren über $\phi : X \to Z$.

(b) Ist $P \in X$ mit $\mathcal{O}_{Z_1,\phi_1(P)} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ via ϕ_1^*, so gilt $\mathcal{O}_{Z,\phi(P)} \cong \mathcal{O}_{X,P}$ via ϕ^*.

Aufgabe 3. *(Elliptische Kurve I)*
Sei $E = V(Y^2Z - X^3 + XZ^2) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie, dass E eine normale projektive Kurve ist.

Aufgabe 4. *(Elliptische Kurve II)*
Wir betrachten weiterhin die (elliptische) Kurve E aus Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gerade $L = V(aX + bY + cZ) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) die Kurve E in genau drei Punkten (mit Vielfachheiten) schneidet.

(b*) Sei $P_0 \in E$ fest. Zu jedem Punkt $P \in E$ sei $\alpha(P)$ der dritte Schnittpunkt von E mit der Geraden L durch P und P_0 (im Falle $P = P_0$ sei L die Tangente an E im Punkt P_0). Zeigen Sie, dass $\alpha : E \to E$ ein zu sich selbst inverser Automorphismus ist.
Hinweis: Im komplizierteren Fall $P_0 \neq (0 : 1 : 0)$ seien $(x_0 : y_0 : 1)$ die Koordinaten von P_0. Man betrachte man die offenen affine Teilmengen $V = E \cap D(X - x_0Z) \subset U = E \cap D(Z)$ und verwende die Koordinaten $x = \overline{\frac{X}{Z}}$, $y = \overline{\frac{Y}{Z}}$ auf U. Zeigen Sie, dass α einen Morphismus $V \to U$ liefert, der auf den Koordinatenringen durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}(V) \\ x & \longmapsto & -x - x_0 + \left(\dfrac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2 \\ y & \longmapsto & \left(\dfrac{y - y_0}{x - x_0}\right)\left(-x - 2x_0 + \left(\dfrac{y - y_0}{x - x_0}\right)^2\right) + y_0 \end{array}$$

gegeben ist. Dehnen Sie dies aus zu einem Morphismus von E nach E.