Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 3
zu bearbeiten bis Dienstag, 12.11.2013

Aufgabe 1. *(Affin $\Rightarrow$ quasiprojektiv)*
Sei $\phi : \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ gegeben durch $(w_1, \ldots, w_n) \mapsto (1 : w_1 : \ldots : w_n)$. Zeigen Sie: Zu jeder algebraischen Teilmenge $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ gibt es eine projektive algebraische Teilmenge $Y \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ mit $\phi^{-1}(Y) = X$. Ist X irreduzibel, so kann Y irreduzibel gewählt werden. Insbesondere sind affine algebraische Mengen quasiprojektiv, und affine Varietäten sind quasiprojektive Varietäten.

Aufgabe 2. *(Normale Varietäten)*
Sei X eine Varietät. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für jedes $P \in X$ ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,P}$ ganz abgeschlossen.
(ii) Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ ist $\mathcal{O}_X(U)$ ganz abgeschlossen.
(iii) Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}$ von X, so dass alle $\mathcal{O}_X(U_i)$ ganz abgeschlossen sind.

Eine Varietät mit obigen äquivalenten Eigenschaften heißt *normal*.

Aufgabe 3. *(Verkleben von Varietäten)*
Gegeben seien zwei Varietäten X_1, X_2, nicht-leere offene Teilmengen $U_1 \subset X_1$ und $U_2 \subset X_2$ sowie ein Isomorphismus von Varietäten $\phi : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$, d. h. ein Homöomorphismus ϕ, so dass $\mathcal{O}_{X_2}|_{U_2}$ und $\phi_*(\mathcal{O}_{X_1}|_{U_1})$ als Garben[1] zueinander isomorph sind. Zeigen Sie: Es gibt eine Varietät X und stetige Abbildungen $\psi_1 : X_1 \to X$, $\psi_2 : X_2 \to X$ mit offenem Bild, so dass gilt:

- $X_1 \xrightarrow{\psi_1} \tilde{X}_1 := \psi_1(X_1)$ und $X_2 \xrightarrow{\psi_2} \tilde{X}_2 := \psi_2(X_2)$ sind Isomorphismen von Varietäten.
- Es gilt $X = \tilde{X}_1 \cup \tilde{X}_2$ und $\tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 = \psi_1(U_1) = \psi_2(U_2)$.
- Die Abbildung
$$U_1 \xrightarrow[\psi_1]{\cong} \tilde{X}_1 \cap \tilde{X}_2 \xrightarrow[\psi_2^{-1}]{\cong} U_2$$
ist gerade der Isomorphismus ϕ.

Wir nennen X die *Verklebung von X_1 und X_2 entlang $\phi : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$.*

Aufgabe 4. *(Beispiele von Verklebungen)*
Seien X_1 und X_2 zwei Kopien von $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ mit Koordinaten s bzw. t. Seien $U_1 \subset X_1$ bzw. $U_2 \subset X_2$ definiert durch $s \neq 0$ bzw. $t \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_{X_1}(U_1) = \mathbb{C}[s, s^{-1}]$ und $\mathcal{O}_{X_2}(U_2) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. Zudem seien zwei Abbildungen $\phi, \phi' : U_1 \to U_2$ definiert durch die zugehörigen Abbildungen auf den Koordinatenringen

$$\phi^* : \mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}[s, s^{-1}], \qquad t \mapsto s^{-1}, \quad t^{-1} \mapsto s,$$
$$\phi'^* : \mathbb{C}[t, t^{-1}] \to \mathbb{C}[s, s^{-1}], \qquad t \mapsto s, \quad t^{-1} \mapsto s^{-1}.$$

Zeigen Sie:

(a) ϕ und ϕ' sind Isomorphismen von Varietäten.

(b) Die Verklebung von X_1 und X_2 entlang $\phi : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

(c) Sei X' die Verklebung von X_1 und X_2 entlang $\phi' : U_1 \xrightarrow{\cong} U_2$. Dann enthält X' zwei Punkte $P_1 \neq P_2$ mit $\mathcal{O}_{X',P_1} = \mathcal{O}_{X',P_2}$. Insbesondere lassen sich P_1 und P_2 nicht durch Funktionen trennen, d. h. jede rationale Funktion verschwindet genau dann in P_1, wenn sie in P_2 verschwindet.

---

[1] Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen und eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X sei $f_*\mathcal{F}$ definiert durch $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ für alle offenen $V \subset Y$. Dies ist automatisch eine Garbe auf Y.