Fundamentalgruppen algebraischer Kurven

Wintersemester 2013/14

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Übungsblatt 2
zu bearbeiten bis Dienstag, 05.11.2013

Aufgabe 1. *(Basisoffene Teilmengen von affinen Mengen und Varietäten)*
Sei $X \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ eine affine Menge, $f \in \mathcal{O}(X)$ und $\tilde{f} \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$ ein Repräsentant von f. Wir vergleichen im Folgenden die Zariski-offene Teilmenge $X_f = X \setminus V(\tilde{f})$ von X (dies ist offensichtlich wohldefiniert) mit der affinen Menge $Y = V(I(X) + (1 - \tilde{f}T_{n+1})) \subset \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}$. Zeigen Sie:

(a) Die Projektion $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}, (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \dots, a_n)$, induziert einen Homöomorphismus $\phi : Y \xrightarrow{\cong} X_f \subset X$. Es gilt $\mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(X)_f$ via $\phi^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$.

(b) Ist X eine affine Varietät, so gilt $\mathcal{O}_{Y,P} \cong \mathcal{O}_{X,\phi(P)}$ für alle $P \in Y$. Folgern Sie: In diesem Fall gilt $\mathcal{O}_Y(\phi^{-1}(U)) \cong \mathcal{O}_X(U)$ für alle offenen $U \subset X_f$.

In der Sprache der Varietäten bedeutet dies: Jede affine Varietät besitzt eine offene Umgebungsbasis aus affinen Varietäten.

Aufgabe 2. *(Überdeckungseigenschaften)*
Sei X ein topologischer Raum und $\{U_i\}$ eine endliche offene Überdeckung von X. Zeigen Sie:

(a) Sind alle U_i noethersch, so auch X.

(b) Ist X zusammenhängend und sind alle U_i irreduzibel, so ist X irreduzibel.

Hinweis: X ist genau dann irreduzibel, wenn jede nicht-leere offene Teilmenge V dicht ist, also $\overline{V} = X$ gilt (warum?). Sei nun $V \subset X$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie $\overline{V} = \bigcup_{U_i \cap V \neq \varnothing} U_i$ und folgern Sie die Behauptung.

Aufgabe 3. *(Projektive algebraische Mengen)*
Auf der Menge $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $w \sim z \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C}^\times : w = \lambda z$. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ und schreiben $(z_0 : \ldots : z_n)$ für die von einem Element $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ repräsentierte Klasse. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so ist Nullstellenmenge von f in $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ abgeschlossen unter $\sim$. Wir können daher *projektive algebraische Teilmengen* als Nullstellenmengen $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ von homogenen Idealen $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ (d. h. Idealen, die von homogenen Polynomen erzeugt werden) definieren. Zeigen Sie weiterhin: Die projektiven algebraischen Teilmengen bilden die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, der *Zariski-Topologie.*

(b) Zu einer projektiven algebraischen Teilmenge $Y \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sei $I(Y) \subset \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ das Ideal, dass von allen homogenen Polynomen f mit $f(P) = 0$ für alle $P \in Y$ erzeugt wird. Dann ist $I(Y)$ ein Radikalideal, und der *homogene Koordinatenring* $S(Y) = \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]/I(Y)$ ist eine reduzierte graduierte $\mathbb{C}$-Algebra.

Aufgabe 4. *(Projektive Varietäten)*
Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive algebraische Teilmenge. Zeigen Sie:

(a) Der Ring $S(Y)$ ist nullteilerfrei. Sei $K(Y) \subset Q(S(Y))$ der Körper, der von allen Brüchen der Form $f = \frac{g}{h}$ mit $g, h \in S(Y)$ homogen vom selben Grad und $h \neq 0$ gebildet wird. Für $P \in Y$ setze man

$$\mathcal{O}_{Y,P} = \left\{ f = \frac{g}{h} \in K(Y) \;\middle|\; g, h \in S(Y) \text{ homogen}, h(P) \neq 0 \right\}.$$

$\mathcal{O}_{Y,P}$ ist ein lokaler Ring, und für $f \in \mathcal{O}_{Y,P}$ ist $f(P) \in \mathbb{C}$ wohldefiniert.

(b*) Für eine offene Teilmenge $U \subset Y$ setze man $\mathcal{O}_Y(U) = \bigcap_{P \in U} \mathcal{O}_{Y,P}$. Dann gilt $\mathcal{O}_Y(Y) = \mathbb{C}$.