Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 13
Abgabe bis Montag, den 18.07.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, H eine Untergruppe. Sei $i : H^{\mathrm{ab}} \to G^{\mathrm{ab}}$ die von der natürlichen Inklusion $H \hookrightarrow G$ induzierte Abbildung. Zeigen Sie, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H^{-2}(H,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Kor}"'] & H^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "i"] \\ H^{-2}(G,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sim"] & G^{\mathrm{ab}}. \end{tikzcd}$$

wobei als horizontale Abbildungen die kanonischen Isomorphismen aus Korollar 4.12 verwendet werden.

Hinweis. Benutzen Sie den Beweis von 4.12 und die Definition von Kor_{-1} (sic).

Aufgabe 2. Sei G eine endliche Gruppe und N ein Normalteiler von G. Zeigen Sie: Ist A ein kohomologisch trivialer G-Modul, so ist A^N ein kohomologisch trivialer G/N-Modul.

Hinweis. Benutzen Sie die Inflation-Restriktion-Folge und Dimensionsverschiebung.

Aufgabe 3. Seien $A_1, A_2, \ldots, A_6$ abelsche Gruppen und

$$\begin{tikzcd} & A_1 \arrow[r, "f_1"] & A_2 \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_6 \arrow[ur, "f_6"] & & & A_3 \arrow[dl, "f_3"] \\ & A_5 \arrow[ul, "f_5"] & A_4 \arrow[l, "f_4"] & \end{tikzcd}$$

ein exaktes Sechseck. Zeigen Sie: Gibt es in diesem Sechseck keine zwei benachbarten A_i mit unendlich vielen Elementen, so sind alle A_i endlich, und es gilt

$$\#A_1 \cdot \#A_3 \cdot \#A_5 = \#A_2 \cdot \#A_4 \cdot \#A_6.$$

Hinweis. Sei $m_i = \#\,\mathrm{im}(f_i)$, $i = 1, \ldots, 6$. Zeigen Sie $\#A_i = m_i m_{i-1}$ (mit $m_0 = m_6$ und den üblichen Multiplikationsregeln für ∞) und folgern Sie daraus die Behauptung.

bitte wenden!

Ziel der folgenden beiden Aufgaben ist es zu zeigen, dass für jede endliche Galoiserweiterung $L|K$ mit Galoisgruppe G der G-Modul L G-induziert ist. Genauer zeigen wir folgenden **Satz von der Normalbasis**:

$$\text{Es gibt ein } \gamma \in L \text{ so, dass } (\sigma\gamma)_{\gamma\in G} \text{ eine Basis von } L|K \text{ bildet.}$$

Aufgabe 4 behandelt den Fall, dass K unendlich viele Elemente enthält, und Aufgabe 5 den Fall, dass G zyklisch ist. Da eine Galoiserweiterung endlicher Körper immer zyklisch ist, sind damit also alle Fälle abgedeckt.

Aufgabe 4. Sei K ein unendlicher Körper, und sei $L|K$ eine Galoiserweiterung vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Galoisgruppe G.

(a) Sei $\gamma \in L$. Angenommen, es gibt eine nichttriviale Relation $\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\gamma = 0$ mit $a_\sigma \in K$. Wenden Sie für τ^{-1} für jedes $\tau \in G$ auf diese Gleichung an und folgern Sie, dass die quadratische Matrix $(\tau^{-1}\sigma\gamma)_{\tau,\sigma} \in M_n(L)$ nicht invertierbar ist.

(b) Sei $\beta \in L$ mit $L = K(\beta)$ und $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von β über K. Wir setzen

$$g(X) = \frac{f(X)}{X-\beta} \in L[X] \quad \text{und} \quad M(X) = (\tau^{-1}\sigma g(x))_{\tau,\sigma} \in M_n(L[X]).$$

Zeigen Sie, dass $\det M(X) \in L[X]$ nicht verschwindet, indem Sie $M(\beta)$ betrachten. Folgern Sie, dass ein $\alpha \in K$ existiert mit $\det M(\alpha) \neq 0$. Sei nun $\gamma = g(\alpha)$. Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass $(\sigma\gamma)_{\sigma\in G}$ eine Normalbasis zu $L|K$ ist.

Aufgabe 5*. Sei $L|K$ eine zyklische Körpererweiterung vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Galoisgruppe G, und sei σ ein Erzeuger von G.

(a) Fassen Sie σ als Endomorphismus des K-Vektorraums L auf und benutzen Sie die lineare Unabhängigkeit der Charaktere $\mathrm{id}, \sigma, \ldots, \sigma^{n-1} : L^\times \to L^\times$, um zu zeigen, dass das Minimalpolynom von σ gleich $X^n - 1$ ist. Folgern Sie über den Grad, dass das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von σ übereinstimmen.

(b) Folgern Sie mit Hilfe Ihres Vorwissens aus der Linearen Algebra (Stichwort: Frobenius-Normalform), dass ein $\gamma \in L$ existiert, so dass $\gamma, \sigma\gamma, \ldots, \sigma^{n-1}\gamma$ eine Basis von $L|K$ bilden.