Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 11
Abgabe bis Freitag, den 01.07.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei K ein globaler Körper, $\overline{K}$ ein separabler Abschluss von K und $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$ die absolute Galoisgruppe von K. Sei v eine Bewertung auf K und $\bar{v}$ eine Fortsetzung auf $\overline{K}$. Zeigen Sie: Der Fixkörper $K_v^h = \overline{K}^{G_{\bar{v}}}$ von $\overline{K}$ unter der Zerlegungsgruppe $G_{\bar{v}}$ von $\bar{v}$ ist gerade der separable Abschluss von K in K_v, hängt also insbesondere nicht von der Wahl von $\overline{K}$ oder $\bar{v}$ ab. Man nennt K_v^h die **Henselisierung** von K bzgl. v.

Aufgabe 2. Sei K ein globaler Körper, v eine nicht-archimedische Bewertung auf K und K_v^h die Henselisierung von K bzgl. v. Sei $\mathcal{O}_v^h$ der Bewertungsring von K_v^h und k der zugehörige Restklassenkörper. Zeigen Sie: Für $\mathcal{O}_v^h$ gilt das Hensel'sche Lemma†, d.h. ist $f \in \mathcal{O}_v^h[X]$ ein Polynom, dessen Reduktion $\bar{f} \in k[X]$ eine einfache Nullstelle $\lambda \in k$ hat, so gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $x \in \mathcal{O}_v^h$ mit $f(x) = 0$ und $\bar{x} = \lambda$.

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass k auch der Restklassenkörper von K_v ist. Benutzen Sie dann das Hensel'sche Lemma für $\mathcal{O}_{K_v}$ und überzeugen Sie sich, dass jede Nullstelle von f in $\mathcal{O}_{K_v}$ schon in $\mathcal{O}_v^h$ liegt.

Aufgabe 3. Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung von Zahlkörpern mit Galoisgruppe G, und sei $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$, $\mathfrak{p} \neq 0$, ein Primideal. Angenommen, es gibt nur ein Primideal $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_L$, das über $\mathfrak{p}$ liegt. Zeigen Sie:

(a) G ist auflösbar.

(b) Ist $e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = 1$, so ist G zyklisch.

Aufgabe 4. Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die maximal zahm verzweigte abelsche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ von endlichem Grad über der maximal unverzweigten Erweiterung $\mathbb{Q}_p^{nr}$ von $\mathbb{Q}_p$ ist.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst: Ist $n \in \mathbb{N}$ mit $(n,p) = 1$, dann ist die Erweiterung $\mathbb{Q}_p^{nr}(\sqrt[n]{p})/\mathbb{Q}_p$ genau dann abelsch, wenn die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{Q}_p$ enthalten ist.

Aufgabe 5*. Sei K ein globaler Körper, v eine Bewertung von K und K_v^h die Henselisierung von K bzgl. v. Zeigen Sie, dass $[K_v^h : K] = \infty$.

Hinweis. Im Fall v archimedisch sollte dies leicht zu sehen sein. Im Fall v nichtarchimedisch sei v' eine andere, nicht-archimedische Bewertung auf K, und seien $a, b \in K$ mit $v(a) = 0$, $v'(a) \geq 1$ sowie $v(b) \geq 1$, $v'(b) = 1$ (warum existieren solche a und b?). Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist das Polynom $f = X^n + aX + b \in K[X]$ irreduzibel in $K_{v'}[X]$ und $K[X]$, hat aber eine Nullstelle in K_v.

---

†Nicht-archimedisch bewertete Körper, deren Bewertungsringe das Hensel'sche Lemma erfüllen, nennt man **henselsch**. Für henselsche Körper gelten viele ähnliche Eigenschaften wie für vollständige Körper, wie z.B. die eindeutige Fortsetzung der Bewertung auf algebraische Erweiterungen.