Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. A. Holschbach

Blatt 8

Abgabe bis Freitag, den 10.06.2011, um 14.00 Uhr

Aufgabe 1. Sei p eine Primzahl.

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \frac{n-1}{p-1}.$$

Hierbei bezeichne $\lfloor r \rfloor$ die größte ganze Zahl kleiner gleich der reellen Zahl r.

Hinweis. Für die Gleichung zählen Sie, wie viele Zahlen $\leq n$ durch p, durch p^2 usw. teilbar sind. Für die Ungleichung wählen Sie $s \in \mathbb{N}_0$ mit $p^s \leq n < p^{s+1}$, und schätzen Sie den nichtverschwindenden Teil der Reihe nach oben ab.

(b) Sei $K|\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung mit Verzweigungsindex e. Zeigen Sie: Für $x \in K$ mit $v_K(x) > \frac{e}{p-1}$ konvergiert die Exponentialreihe

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

und für $m > \frac{e}{p-1}$ wird $\mathfrak{p}_K^m$ unter exp auf $U_K^{(m)}$ abgebildet.

Aufgabe 2. Sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper. Zeigen Sie:

(a) Jede Untergruppe von endlichem Index in $K^\times$ ist offen und abgeschlossen.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $K^\times$ nur endlich viele Untergruppen vom Index n.

Aufgabe 3. Sei $K|\mathbb{Q}_p$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, $e = v_K(p)$ der absolute Verzweigungsindex. Zeigen Sie: Für die Ordnung $p^a = \#\mu(K)(p)$ der Gruppe der p-Potenz-Einheitswurzeln in K gilt

$$p^a \leq \frac{ep}{p-1}.$$

Bestimmen Sie $\mu(\mathbb{Q}_p)$ für alle Primzahlen p.

Hinweis. Ist $\zeta_{p^n} \in K$ eine primitive p^n-te Einheitswurzel ($n \in \mathbb{N}$), so schließen Sie mit Ihrem Vorwissen aus der Zahlentheorie I, dass $e \geq e(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})|\mathbb{Q}_p) = [\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}) : \mathbb{Q}_p] = p^{n-1}(p-1)$.

bitte wenden!

Aufgabe 4. Sei $K = \mathbb{F}_q((T))$, $q = p^f$ eine Primpotenz, $U_K^{(1)} = 1 + \mathfrak{p}_K$ die Einseinheitengruppe von K (die auch in diesem Fall ein $\mathbb{Z}_p$-Modul ist, wie analog zum $\mathfrak{p}$-adischen Fall folgt). Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in U_K^{(1)}$ mit $v_K(y-1) > v_K(x-1)$ gilt

$$v_K(xy-1) = v_K(x-1).$$

Für $x \in U_K^{(1)}$, $a \in \mathbb{Z}_p$ gilt

$$v_K(x^a - 1) = \frac{v_K(x-1)}{|a|_p}.$$

Hinweis. Zeigen Sie die zweite Aussage zunächst für $a = p$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $(a, p) = 1$, und folgern Sie die allgemeine Aussage durch Grenzübergang.

(b) Folgern Sie aus (a): Die Elemente $1 + T^{np+1} \in U_K^{(1)}$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind allesamt $\mathbb{Z}_p$-linear unabhängig. Somit ist $U_K^{(1)}$ ein $\mathbb{Z}_p$-Modul von unendlichen Rang.

Aufgabe 5*. Sei $K|\mathbb{Q}_p$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, $e = v_K(p)$ der absolute Verzweigungsindex. Sei $U^{(n)}$ mit $n > \frac{e}{p-1}$ die n-Einheitengruppe von K. Zeigen Sie:

Ist π eine Uniformisierende von K und $a_1, \dots a_f$ ein Repräsentantensystem in $\mathcal{O}_K$ von einer Basis des $\mathbb{F}_p$-Vektorraums $k = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}_K$, so ist

$$(1 + a_i \pi^{n+j})_{i=1,\dots,f,\ j=0,\dots,e-1}$$

eine Basis des freien $\mathbb{Z}_p$-Moduls $U^{(n)}$.

Hinweis. Beweisen Sie zunächst, dass $(U^{(n)})^p = U^{(n+e)}$. Zeigen Sie dann, dass die Bilder der oben angegebenen Elemente in dem $\mathbb{F}_p$-Vektorraum $U^{(n)}/U^{(n+e)}$ ein linear unabhängiges System bilden, und verwenden Sie Nakayama.