Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Sommersemester 2011

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut — Blatt 5
Dr. A. Holschbach — Abgabe bis Freitag, den 20.05.2011, um 14.00 Uhr

---

Aufgabe 1. Sei k ein Körper und $K = k(T)$. Wir setzen $U = 1/T$.

(a) Sei v die zu dem Primideal $(U) \subset k[U]$ gehörige Exponentialbewertung auf $K = \operatorname{Quot}(k[U])$. Zeigen Sie, dass v gerade die Gradbewertung v_∞ aus der Vorlesung ist, d. h. für $f, g \in k[T] \setminus \{0\}$ gilt

$$v\left(\frac{f}{g}\right) = \deg_T g - \deg_T f.$$

(b) Sei $p \in k[U]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n mit $(p) \neq (U)$. Welchem Primideal in $k[T]$ entspricht die zu (p) gehörige Exponentialbewertung $v_{(p)}$?

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $v_1, \ldots, v_n$ diskrete Exponentialbewertungen. Zeigen Sie: Der Ring

$$A = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{v_i} \subset K$$

ist ein Hauptidealring mit endlich vielen Primidealen.

Hinweis. Benutzen Sie den schwachen Approximationssatz.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x-1|_2 < \frac{1}{3}, \quad |x-2|_3 < \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad |x-3|_\infty < 1.$$

Aufgabe 4. Es sei k ein Körper mit einer nicht-archimedischen Bewertung $|\ |$, und sei $K = k(T)$. Für $f = a_n T^n + \ldots + a_0 \in k[T]$ setzen wir

$$|f| \overset{\text{def}}{=} \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Zeigen Sie, dass dies eine Bewertung auf K induziert, welche die auf k gegebene Bewertung fortsetzt.

Hinweis. Erinnern Sie sich an den Satz von Gauß aus der Algebra-Vorlesung.

Aufgabe 5*. Sei p eine Primzahl und α eine nicht-rationale reelle Zahl. Zeigen Sie: Es gibt genau eine Exponentialbewertung v auf $\mathbb{Q}(T)$, für die $v(p) = 1$ und $v(T) = \alpha$ gilt, und die zugehörige Bewertung ist nicht-archimedisch und nicht-diskret. Bestimmen Sie den zugehörigen Restklassenkörper $k(v) = \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass jede solche Bewertung nicht-archimedisch ist. Folgern Sie: Für $f = a_n T^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[T]$ gilt $v(f) = \min_{0 \le i \le n}(v_p(a_i) + i\alpha)$, und diese Funktion induziert tatsächlich eine Bewertung auf $\mathbb{Q}(T)$.