Halbeinfache Algebren

Seminar im Wintersemester 2012/13
Prof. Dr. A. Schmidt mit Dr. A. Holschbach

Inhalt

Einfache und halbeinfache Algebren sind (i.A. nichtkommutative) Ringe, deren Struktur sich mit elementaren Methoden der linearen Algebra beschreiben lässt. Beispiele sind Matrizenringe über einem Körper oder Schiefkörper wie die Hamilton'schen Quaternionen. Wir werden zunächst die grundlegenden Definitionen einführen und dann den Aufbau solcher Algebren untersuchen. Erstes großes Ziel des Seminars ist dann der Satz von Wedderburn, welcher besagt, dass die einfachen Algebren genau die Matrizenringe über Schiefkörpern sind.

Nach diesem Struktursatz konzentrieren wir uns auf einfache Algebren, deren Zentrum ein vorgegebener Körper K ist. Die Menge (von Klassen) solcher Algebren lässt sich mit einer Gruppenstruktur versehen und wird Brauergruppe $\mathrm{Br}(K)$ von K genannt. Brauergruppen sind aufgrund ihrer vielfachen Anwendung auch heute ein Objekt intensiver Forschung. Neben den einfacheren Beispielen der Brauergruppen von den reellen Zahlen und endlichen Körpern betrachten wir auch eine kohomologische Deutung der Brauergruppe. Als Schlusspunkt bestimmen wir die Brauergruppe eines lokalen Körpers.

Teilnehmerkreis und Vorkenntnisse

Das Seminar richtet sich vornehmlich an Studenten im Studiengang *Bachelor Mathematik* oder *Lehramt Mathematik* im 3. und 5. Semester. Vorkenntnisse im Umfang der Vorlesung *Lineare Algebra I & II* werden vorausgesetzt, die nötigen Kenntnisse im Bereich der *Algebra I* können parallel zum Seminar in der Vorlesung bei Prof. Schmidt erworben werden.

Zeit und Ort

Mittwoch, 14 – 16 Uhr, INF 288, HS 5

Anmeldung und Vortragsvergabe

Bei der zweiten Vorbesprechung am

Dienstag, den 31.07.2012, 15.30 Uhr s.t., INF 288, HS 2

oder danach per E-Mail.

Kontakt

Dr. Armin Holschbach
INF 288, Raum 107
Tel. +49-6221-54-4975
holschbach@mathi.uni-heidelberg.de

Zum Ablauf

Zu den unten aufgeführten Terminen halten die Studenten Vorträge zu den von ihnen gewählten Themen. Die Mindestanforderung an den Vortrag ist, dass der Vortragende selbst den Stoff, über den er vorträgt, durchdrungen hat. Ferner soll der Vortragende in der Lage sein, den Stoff den anderen Seminarteilnehmern verständlich zu vermitteln.

Die Vorträge sollen an der Tafel gehalten werden. Ausnahmen davon sind nach Rücksprache mit dem Betreuer möglich. Für frei gehaltene Vorträge gibt es Pluspunkte. Eine schriftliche Ausarbeitung wird nicht verlangt; jedoch kann durch sie ein mangelhafter Vortrag ausgeglichen werden.

Die Dauer der Vorträge soll 90 Minuten nicht überschreiten. Wenn die Vortragszeit nicht auszureichen scheint, muss eine sinnvolle Auswahl des Stoffes getroffen werden.

Es wird erwartet, dass die Vortragenden sich spätestens eine Woche vor ihrem Vortrag mit dem Betreuer des Seminars in Verbindung setzen, um ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Der Betreuer steht darüber hinaus auch für Rückfragen und zur Klärung von Verständnisschwierigkeiten bei der Vortragsausarbeitung zur Verfügung.

Eine ausführliche Anleitung, wie man einen guten Seminarvortrag hält, findet man hier:

`http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag`

Vorträge

Hauptquelle ist das Buch [Ker90] von Ina Kersten. Fast alle Aussagen finden sich aber auch in den Büchern [Ker07] und [Lor90], so dass sich ein vergleichender Blick oft lohnt. Allerdings sei darauf hingewiesen, dass die Notation in den beiden letztgenannten Büchern etwas von der des ersten Buches abweicht: In [Ker90] ist im Gegensatz zu den beiden anderen Büchern hauptsächlich von Rechts- statt von Linksmoduln die Rede. Um die Notation einheitlich zu halten, sollten bei Zitaten aus den beiden anderen Büchern die Aussagen entsprechend umformuliert werden. Dies betrifft hauptsächlich Vorträge 2 und 3.

Vortrag 1: Algebren und ihre Moduln (17.10.12)

In diesem Vortrag werden die grundlegenden Definitionen wie Algebren, Schiefkörper, ein- und zweiseitige Ideale, Moduln und Homomomorphismen vorgestellt und erste Beispiele diskutiert [Ker90, 1.1-1.12]. Auch der Begriff der inversen oder oppositionellen Algebra sollte erwähnt werden [Ker07, 1.2]. Dann folgt ein Satz über den Eigenschaften von Endomorphismenalgebren [Ker90, 1.13]. (Vgl. auch [Lor90, §28.1]).

Vortrag 2: Einfache und halbeinfache Moduln (24.10.12)

Einfache und halbeinfache Moduln werden definiert und ihre Eigenschaften besprochen. Herauszuheben ist insbesondere das Lemma von Schur und die Zerlegung halbeinfacher Moduln in isogene Komponenten. Dieser Vortrag umfasst [Lor90, §28.2] bis einschließlich F16, allerdings ohne F8 und Definition 4.

Vortrag 3: Die Struktursätze von Wedderburn (31.10.12)

Zunächst werden einfache K-Algebren definiert und ihre Struktur ergründet [Ker90, §2]. Der Struktursatz 2.5 ist zentral für den Rest des Seminars. Bei der Definition von halbeinfachen Algebren benutze man [Lor90, §28.2 Definition 4] statt der aus [Ker90] und zeigen zunächst [Lor90, §28.2 F17 & F18], bevor dann den Struktursatz für halbeinfache Algebren [Ker90, 3.6] bewiesen wird.

Vortrag 4: Tensorprodukte (07.11.12)

Das Tensorprodukt von einem Rechts- und einem Linksmodul über einem beliebigen Ring wird eingeführt und seine Eigenschaften besprochen [Ker90, §4]. Dann wird noch das Tensorprodukt zweier Algebren behandelt [Ker90, 5.6-5.7].

Vortrag 5: Zentrum & Zentralisator (14.11.12)

Zentrum und Zentralisator werden eingeführt und ihre Eigenschaften behandelt [Ker90, 5.1-5.5] (der Beweis zu 5.2 ist dabei zu ergänzen). Dann werden Zentralitätseigenschaften von Tensorprodukten von Algebren behandelt [Ker90, 5.8-5.10].

Vortrag 6: Die Brauergruppe (21.11.12)

Der Begriff der Azumaya-Algebra wird eingeführt und die Ähnlichkeitsrelation definiert. Auf der Menge der Ähnlichkeitsklassen von Azumaya-Algebren definiere man dann eine Gruppenstruktur und erhält die Brauergruppe. Dann untersucht man erste Eigenschaften von Azumaya-Algebren und Brauergruppe [Ker90, §6]. Schließlich wird noch der Begriff des Zerfällungskörpers erläutert und die relative Brauergruppe definiert [Ker90, §7].

Vortrag 7: Der Satz von Skolem-Noether und der Zentralisatorsatz (28.11.12)

Der Satz von Skolem-Noether und der Zentralisatorsatz sind wichtige Hilfsmittel bei der Untersuchung der Brauergruppe [Ker90, §8]. Nach ihrer Erläuterung behandle man noch den Zusammenhang zwischen Zerfällungskörper und maximalen Teilkörpern einer Azumaya-Algebra [Ker90, §9].

Vortrag 8: Existenz eines galoisschen Zerfällungskörpers (05.12.12)

Für viele Aussagen über Azumaya-Algebren braucht man die Existenz eines galoisschen Zerfällungskörpers. Dieser werde anhand [Ker90, §10] gezeigt. Dann werden ein paar Beispiele von Brauergruppen behandelt, nämlich die Brauergruppe von $\mathbb{R}$ und von einem endlichen Körper [Ker90, 11.1-11.2]. Wenn Zeit ist, modifiziere man den Beweis von [Ker90, 11.1], um [Ker07, 8.8, Aufgabe 27] zu beweisen.

Vortrag 9: Verschränkte Produkte (12.12.12)

In diesem Vortrag wird die Darstellung von Azumaya-Algebren als verschränkte Produkte behandelt [Ker90, §13].

Vortrag 10: Kohomologische Beschreibung der Brauergruppe (19.12.12)

Zunächst definiere man den Begriff der Kohomologiegruppen und zeige die Noethersche Gleichung sowie Hilberts Satz 90 [Ker90, §12]. Dann erläutere man die kohomologische Beschreibung der Brauergruppe [Ker90, §14]. (Einen tieferen Einblick in die Theorie der Kohomologiegruppen bietet das Buch [Neu11]; aus Zeitgründen muss allerdings die Kurzversion in [Ker90] für uns reichen.)

Vortrag 11: Exponent und Index; Zyklische Algebren (09.01.13)

Zunächst führe man Exponent und Index einer Azumaya-Algebra ein und erläutere ihren Zusammenhang [Ker90, §15]. Dann untersuche man die Struktur der relativen Brauergruppe einer zyklischen Körpererweiterung und definiere den Begriff einer zyklischen Algebra [Ker90, 16.1-16.4]. Abschließend beweise man noch [Ker90, 16.15].

Vortrag 12: Diskrete Bewertungen (16.01.13)

Man führe den Begriff der diskreten Bewertung und Bewertungsring ein und erläutere ihn an ein paar Beispielen. Dabei sei das Hauptaugenmerk auf die diskreten Bewertungn von $\mathbb{Q}$ gelegt, die Bewertungen von $K(X)$ können weniger umfangreich behandelt werden. Man bespreche auch die assozierten Absolutbeträge von $\mathbb{Q}$ und deren Vervollständigungen [Ker07, §11] sowie die Reihendarstellung der p-adischen Zahlen [Ker07, 12.9]. Man vergleiche hierzu auch [Ker90, 11.3-11.8] und die entsprechenden Teile in [Neu06, II.§2-§3].

Vortrag 13: Lokale Körper (23.01.13)

Zunächst definiere man lokale Körper [Ker90, 11.11]. Als nächstes beweise man das Hensel'sche Lemma ([Ker90, 16.5], Beweis in [Ker07, 12.1] und [Neu06, II.4.6]). Danach untersuche man die Fortsetzungen einer diskreten Bewertung eines lokalen Körpers K auf endlich-dimensionale Schiefkörper über K [Ker90, 16.6], [Ker07, 12.4] (den Beweis der Vollständigkeit lasse man aus). Dann definiere man Verzweigungsindex e und Trägheitsgrad f einer Erweiterung $L|K$ lokaler Körper und zeige die Gleichung $ef = [L : K]$ ([Ker07, 12.6, 12.7, 12.11] und [Neu06, II.6.8]).

Vortrag 14: Die Brauergruppe eines lokalen Körpers (30.01.13)

Nach der Definition des Begriffs einer unverzweigten Erweiterung lokaler Körper $L|K$ untersuche man die Struktur solcher Erweiterungen und der zugehörigen Brauergruppe sowie die Existenz unverzweigter Zerfällungskörper von Azumaya-Algebren über lokalen Körpern [Ker90, 16.8-16.14] (für die letzte Aussage vgl. auch [Ser79, XII.§2]). Dann folgere man als krönenden Abschluss die Form der Brauergruppe von lokalen Körpern [Ker90, 16.16-16.17].

Literatur

[Ker90] I. Kersten, *Brauergruppen von Körpern*, Vieweg 1990.

[Ker07] I. Kersten, *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen 2007. Digitale Version verfügbar unter webdoc.sub.gwdg.de/univerlag/2007/brauergruppen.pdf.

[Lor90] F. Lorenz, *Einführung in die Algebra, Teil 2*, BI-Wissenschaftsverlag 1990.

[Neu06] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 2006. Digitale Version verfügbar unter www.springerlink.com/content/978-3-540-37547-0.

[Neu11] J. Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, Springer 2011. Digitale Version verfügbar unter www.mathi.uni-heidelberg.de/˜schmidt/Neukirch/.

[Ser79] J.-P. Serre, *Local Fields*, Springer 1979.