Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 9
Abgabetermin: Donnerstag, 17.12.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Untersuchen Sie, ob folgende Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$ mehrfache Nullstellen haben:

(i) $f = X^5 + 6X^3 + 3X + 4$

(ii) $f = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$

(iii) $f = X^5 + 5X + 5$.

(b) Untersuchen Sie, ob folgende Polynome (über dem jeweils angegebenen Polynomring) separabel sind:

(i) $f = X^3 - X^2 - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(ii) $f = X^{10} - 5X^7 + 30X^2 + 10 \in \mathbb{R}[X]$

(iii) $f = X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$

(iv) $f = Y^9 + XY^3 - X \in (\mathbb{F}_3[X])[Y]$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Wie betrachten $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$.

(a) Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ und den Separabilitätsgrad $[L : \mathbb{Q}]_s$.

(b) Sei $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$. Geben Sie alle Homomorphismen $L \to \overline{\mathbb{Q}}$ an.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Zeigen Sie, dass K genau dann vollkommen ist, wenn der Frobenius-Homomorphismus $\sigma : K \to K, a \mapsto a^p$ surjektiv ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

(a) Sei K ein Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Sei $K(X)$ bzw. $\overline{K}(X)$ der Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten X über K bzw. $\overline{K}$.

Zeigen Sie, dass $\overline{K}(X)/K(X)$ normal ist.

(b) Sei E ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $L := E(X, Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten X, Y über E. Weiter sei $K := E(X^p, Y^p) \subset L$. Zeigen Sie:

(i) $[L : K] = p^2$.

(ii) Für alle $a \in L$ gilt $a^p \in K$.