Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 8
Abgabetermin: Donnerstag, 10.12.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Sei K Körper und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K.
Zeigen Sie: Ist K abzählbar, so auch $\overline{K}$.

(b) Zeigen Sie, dass jeder algebraisch abgeschlossene Körper unendlich viele Elemente besitzt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) \subset \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass L ein Zerfällungskörper des Polynoms $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ ist.

(b) Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$ sowie alle $\mathbb{Q}$-Automorphismen von L.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i)$ gilt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

(a) Ist die Körpererweiterung $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}}\right)/\mathbb{Q}$ normal?

(b) Sei $\mathbb{Q}[X, Y]$ der Polynomring in den Unbestimmten X, Y, sei I das von den Polynomen $f = X^3 - 2$ und $g = X^2 + XY + Y^2$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Q}[X, Y]$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[X, Y]/I$ ein Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Sei weiterhin L ein Zerfällungskörper von f über K.

(a) Zeigen Sie, dass $[L : K] \mid n!$.

(b) Ist $[L : K] = n!$, so ist f irreduzibel in $K[X]$.