Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 7
Abgabetermin: Donnerstag, 03.12.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie den Grad von $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ über $\mathbb{Q}$ und das Minimalpolynom von $i + \sqrt{2}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

(a) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ gilt.

(b) Gilt auch $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

(a) Es sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit Grad $[L : K] = p$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl sei. Zeigen Sie, dass L/K einfach ist.

(b) Sei L/K eine endliche Körpererweiterung mit $[L : K] = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 3, welches in L eine Nullstelle besitze. Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle in K besitzt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei L/K eine Körpererweiterung und $x \in L$ transzendent über K.

(a) Zeigen Sie, dass auch x^n transzendent über K ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Zeigen Sie, dass x algebraisch über $K(x^n)$ ist und dass $[K(x) : K(x^n)] = n$ ist.