Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 6
Abgabetermin: Donnerstag, 26.11.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebenen Polynome irreduzibel sind oder nicht.

(a) $X^4 + 1 \in \mathbb{R}[X]$

(b) $X^4 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$

(c) $X^7 + 11X^3 - 33X + 22 \in \mathbb{Q}[X]$

(d) $3X^2 - 9X - 27 \in \mathbb{Z}[X]$ (und in $\mathbb{Q}[X]$?)

(e) $X^q + 1 \in \mathbb{Z}[X]$, wobei m eine nichtnegative ganze Zahl, und $q = 2^m$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Wir betrachten die Ideale

$$(X, Y),\ (X, Y, 2),\ (X + Y),\ (XY),\ (X),\ (X + Y^2, Y + X^2)$$

in $R[X, Y]$ für $R = \mathbb{Z}$ und $R = \mathbb{Q}$. Welche dieser Ideale sind Primideale bzw. maximale Ideale in $\mathbb{Z}[X, Y]$ bzw. $\mathbb{Q}[X, Y]$?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass in einem Ring R genau dann jede aufsteigende Kette von Idealen stationär ist (d.h. zu einer aufsteigenden Kette von Idealen $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $I_j = I_n$ für alle $i \geq n$), wenn jedes Ideal in R endlich erzeugt ist.
In diesem Fall heißt R ein noetherscher Ring.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei R ein Hauptidealring und $Q = \mathrm{Quot}(R)$. Sei $f \in R[X] \subset Q[X]$ ein normiertes Polynom und sei $a \in Q$ eine Nullstelle von f in Q. Zeigen Sie, dass a bereits in R enthalten ist.
Folgern Sie daraus, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Nullstelle von f von der Form $a = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q ist. Zeigen Sie weiter, dass gilt: Für teilerfremde Elemente $p, b \in R$ und ein $c \in R$ gilt, dass aus $b|pc$ schon $b|c$ folgt.