Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 5
Abgabetermin: Donnerstag, 19.11.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Auf dem Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ definieren wir die Normabbildung durch

$$\begin{aligned} \mathrm{N} : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{-5} &\longmapsto a^2 + 5b^2. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung multiplikativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ genau dann eine Einheit ist, wenn $\mathrm{N}(x) = 1$ gilt.

(c) Zeigen Sie nun, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$ bezüglich der Norm

$$N(a + b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$$

ein euklidischer Ring ist.

(b) Zerlegen Sie $1 + 4\sqrt{-2}$ in irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ (und begründen Sie, dass es sich um irreduzible Elemente handelt).

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei M ein kommutatives Monoid und R ein Ring. $R^{(M)}$ bezeichne die Menge aller Abbildungen $f : M \to R$ mit $f(\mu) = 0$ für fast alle $\mu \in M$. Wir identifizieren eine Abbildung $f : M \to R$ mit der zugehörigen Folge $(a_\mu)_{\mu \in M}$ der Bilder in R und definieren

$$R\,[M] := \{(a_\mu)_{\mu \in M} \,:\, a_\mu \in R,\, a_\mu = 0 \text{ für fast alle } \mu\}$$

mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (a_\mu)_{\mu \in M} + (b_\mu)_{\mu \in M} &:= (a_\mu + b_\mu)_{\mu \in M} \\ (a_\mu)_{\mu \in M} \cdot (b_\mu)_{\mu \in M} &:= (c_\mu)_{\mu \in M}, \quad \text{mit } c_\mu = \sum_{\lambda + \nu = \mu} a_\lambda \cdot b_\nu. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $R\,[M]$ mit diesen Verknüpfungen ein Ring ist.

(b) Für $\mu \in M$ betrachten wir nun $X^\mu := (\delta_{\mu,\lambda})_{\lambda \in M}$ als Element von $R\,[M]$, wobei $\delta_{\mu,\lambda}$ das Kronecker-Delta bezeichnet. Man nennt X^μ auch das zu μ gehörige Monom in $R\,[M]$. Die Elemente aus $R\,[M]$ kann man dann in der Form $\sum_{\mu \in M} a_\mu X^\mu$ schreiben, wobei die Koeffizienten $a_\mu \in R$ eindeutig bestimmt sind und für fast alle $\mu \in M$ verschwinden.

Wie lauten in dieser Notation die Verknüpfungsregeln? Geben sie außerdem das Null–und Einselement von $R\,[M]$ an.

(c) Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des Polynomrings: Sei S ein weiterer Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Sei $\sigma : M \to S$ ein Monoidhomomorphismus (S wird hierbei als Monoid unter der Ringmultiplikation aufgefasst).

Zeigen Sie, dass ein eindeutig bestimmter Ringisomorphismus $\Psi : R[M] \to S$ mit $\Psi|_R = \varphi$ und $\Psi(X^\mu) = \sigma(\mu)$ für alle $\mu \in M$ existiert.

Setzen wir nun $M = \mathbb{N}^n$, so erhalten wir den in der Vorlesung definierten Polynomring $R[X_1, \ldots, X_n]$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[X]$ über den ganzen Zahlen ein Integritätsring aber kein Hauptidealring ist.