Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 4
Abgabetermin: Donnerstag, 12.11.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es sei $a \in \mathbb{Z}$. Gibt es eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$, so dass $b-1$ durch 3 teilbar, $b-3$ durch 4 teilbar und $b-a$ durch 5 teilbar ist? Wenn ja, bestimmen Sie für $a=2$ und $a=4$ die kleinste positive ganze Zahl mit dieser Eigenschaft.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Wir betrachten den Ring der Gaußschen ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}[i] := \{a+bi;\ a,b \in \mathbb{Z}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Normabbildung $\mathrm{Norm} : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, $\mathrm{Norm}(a+bi) = a^2+b^2$ multiplikativ ist, d.h. es gilt $\mathrm{Norm}(xy) = \mathrm{Norm}(x)\,\mathrm{Norm}(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}[i]$.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^\times$.

(c) Zeigen Sie, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ von der Form $p = 4k+3$ mit $k \in \mathbb{N}$ auch in $\mathbb{Z}[i]$ ein Primelement ist. (*Hinweis:* Es reicht zu zeigen, dass dieses Element irreduzibel ist.)

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass es keinen Ring R mit genau 5 Einheiten geben kann.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $x+x=0$ für $x \in R$ gilt. Betrachten Sie dann $1+a^2+a^3$ für eine Einheit a der Ordnung 5.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei R nullteilerfrei. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) R besitzt nur endlich viele Ideale.

(b) R ist ein Körper.

(c) R besitzt genau zwei Ideale.