Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 3
Abgabetermin: Donnerstag, 05.11.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 2000.

(b) Sei G eine endliche abelsche Gruppe und U eine Untergruppe von G mit $U \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $G/U \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Ordnung von G und zeigen Sie, dass G höchstens 4 Elemente der Ordnung ≤ 2 besitzt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $q \in \mathbb{Q}^*$. Wir betrachten Untergruppen von $\mathbb{Q}$ der Form $q\mathbb{Z}$.

(a) Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sowie einen Isomorphismus $\psi : \left(\frac{1}{n}\mathbb{Z}\right)/(m\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ an.

(b) Geben Sie für jedes $q \in \mathbb{Q}^*$ einen Isomorphismus $\phi : \mathbb{Q}/q\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ an.

(c) Berechnen Sie die folgenden Indices: $\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} : \mathbb{Z}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}\right)$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien G, H endliche Gruppen und U eine Untergruppe von G. Weiter sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass dann

$$(G : U) = (f(G) : f(U)) \cdot (\mathrm{Kern}(f) : (\mathrm{Kern}(f) \cap U))$$

gilt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei G eine Gruppe und $G \times G$ das direkte Produkt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist jede Untergruppe von $G \times G$ ein Normalteiler, so ist G abelsch.

(b) Ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so ist G abelsch.