Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 13
Abgabetermin: Donnerstag, 28.01.2016, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie eine 2-Sylowgruppe in der alternierenden Gruppe A_5.

(b) Geben Sie alle möglichen Normalreihen von $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ mit den zugehörigen Faktoren an.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Seien p, q Primzahlen mit $p < q$. Sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Es gelte $p \nmid (q-1)$. Zeigen Sie:

(a) G besitzt genau eine p-Sylowgruppe S_p und eine q-Sylowgruppe S_q.

(b) Es gilt $G = \langle S_p, S_q \rangle$.

(c) G ist abelsch.

(d) G ist zyklisch.

In den nächsten Aufgaben verwenden wir folgende Definition: Eine endliche Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie nur sich selbst und die triviale Untergruppe als Normalteiler besitzt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Jede Gruppe G der Ordnung p^2q mit p, q prim ist auflösbar.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass G nicht einfach ist.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Jede einfache Gruppe der Ordnung 60 ist zu der alternierenden Gruppe A_5 isomorph.
Hinweise: Sie dürfen folgende Aussagen verwenden:

(a) Für $n \geq 5$ ist A_n der einzige nichttriviale Normalteiler von S_n.

(b) Sei G eine einfache Gruppe und sei $U \subsetneq G$ eine Untergruppe von G. Sei L die Menge der Linksnebenklassen von U in G. Dann ist G zu einer Untergruppe von S_L isomorph.