Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 12
Abgabetermin: Donnerstag, 21.01.2016, 14:15 Uhr

Im Folgenden sei $\zeta_n := \exp(2\pi i/n) \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $L := \mathbb{Q}(\zeta_8)$ der achte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, deren Untergruppen und alle Zwischenkörper der Erweiterung. Welche der Zwischenkörper sind ebenfalls galoissch über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $L := \mathbb{Q}(\zeta_7)$ der siebte Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$. Dann ist $L/\mathbb{Q}$ galoissch als Zerfällungskörper von $\Phi_7 = X^6 + X^5 + ... + X + 1$. Es bezeichne G die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(a) Zeigen Sie, dass ein $\sigma \in G$ existiert mit $\sigma(\zeta_7) = \zeta_7^3$.

(b) Zeigen Sie, dass σ die Gruppe G erzeugt.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{Q}(\zeta_7)$ die Gleichung $\sigma^3(z) = \overline{z}$ gilt, wobei $\bar{\cdot}$ die komplexe Konjugation bezeichnet.

(d) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $a := \zeta_7 + \zeta_7^6$ und von $b := \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(e) Zeigen Sie, dass die einzigen echten Zwischenkörper der Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ durch die Erweiterungen $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(b)/\mathbb{Q}$ gegeben sind.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für die multiplikative Gruppe $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ durch

$$\circ : G \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (t, (x, y)) \mapsto t \circ (x, y) := (tx, t^{-1}y)$$

eine Operation von G auf $\mathbb{R}^2$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Bahnen dieser Operation.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

(a) Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $G = \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Dann operiert G auf M durch $\sigma \circ m = \sigma(m)$. Bestimmen Sie die Bahnen $G \circ 2$ und $G \circ 4$, sowie die Stabilisatoren G_2 und G_4.

(b) Sei G eine endliche Gruppe. G operiere transitiv auf einer Menge M mit $|M| > 2$. Zeigen Sie: Es gibt ein $g \in G$ mit $gm \neq m$ für alle $m \in M$.