Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 11
Abgabetermin: Donnerstag, 14.01.2016, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, alle Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ und alle Zwischenkörper von $L/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

(a) Es sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Teilkörper, so dass $L/\mathbb{Q}$ eine zyklische Galoiserweiterung vom Grad 4 ist.

  (i) Zeigen Sie, dass die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$ genau einen echten Zwischenkörper E besitzt.

  (ii) Zeigen Sie, dass $E \subset \mathbb{R}$ gilt.

(b) Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom mit abelscher Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $|\mathrm{Gal}(f)| = \deg(f)$.

(c) Sei $f = X^4 + 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel. Bestimmen Sie die Diskriminante von f und zeigen Sie:
$$\sqrt{b} \in \mathbb{Q} \iff G \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
Hierbei bezeichnet G die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, wobei L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie:

(a) $f(X) | f(X^2 - 2)$.

(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ ist galoisch.

(c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ ist zyklisch der Ordnung 3.

Hinweis: Sie dürfen folgende Aussagen verwenden:

- Sei $f = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_n \neq 0$. Ist $\frac{p}{q}$ eine rationale Nullstelle von f mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, so gilt $q | a_n$ und $p | a_0$.
- Ein Polynom von Grad 2 oder 3 über einem Integritätsbereich R, welches in R keine Nullstellen besitzt, ist irreduzibel.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

(a) Sei $f = X^3 - 7$ in $\mathbb{Q}[X]$.

  (i) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper L von f.

  (ii) Zeigen Sie, daß die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ von L über $\mathbb{Q}$ isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

(iii) Finden Sie ein $\alpha \in L$ mit der Eigenschaft $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(iv) Bestimmen Sie die Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ und die zugehörigen Zwischenkörper.

(b) Bestimmen Sie die Galoisgruppe von $f = X^4 - 5$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ unter Verwendung des Hauptsatzes der Galoistheorie.