

Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 10
Abgabetermin: Donnerstag, 07.01.2016, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. (4 Punkte)

- (a) Welche der folgenden Körpererweiterungen besitzen ein primitives Element? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches.
- (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$.
 - (ii) $K(X, Y)/K(X + Y, XY)$, für einen Körper K .
- (b) Sei E ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $L := E(X, Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten X, Y über E . Weiter sei $K := E(X^p, Y^p) \subset L$. Zeigen Sie, dass es kein primitives Element von L/K gibt.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

- (a) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal? (Begründen Sie Ihre Antworten.)
- (i) $\mathbb{F}_{81}/\mathbb{F}_9$.
 - (ii) $\mathbb{F}_{25}(t)/\mathbb{F}_{25}(t^8)$.
- (b) Seien p und q prim. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^{p^q} - X \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ in p verschiedene Faktoren vom Grad 1 und in $\frac{p^q - p}{q}$ verschiedene Faktoren vom Grad q zerfällt.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei p prim und \mathbb{F} ein algebraischer Abschluss des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dann wissen wir aus der Vorlesung, dass \mathbb{F} zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau einen Teilkörper \mathbb{F}_{p^n} mit p^n Elementen enthält. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\mathbb{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$ (erklären Sie Addition und Multiplikation).
- (b) $\mathbb{F}_{q^\infty} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{q^n}}$ ist ein echter, unendlicher Teilkörper von \mathbb{F} .
- (c) Sei $\psi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}, x \mapsto x^p$ der Frobenius-Automorphismus. Dann ist $\Gamma := \langle \psi \rangle \subset \text{Aut } \mathbb{F}$ eine unendliche Gruppe.
- (d) \mathbb{F}_{q^∞} ist vollkommen.
- (e) Es gibt Automorphismen φ von \mathbb{F} mit $\varphi \notin \Gamma$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ über \mathbb{Q} .

- (b) Sei M der Zerfällungskörper von $X^{15} - 10$ über \mathbb{Q} und sei G die Automorphismengruppe von M über \mathbb{Q} . Bestimmen Sie die Gruppe G und zeigen Sie, dass G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist.

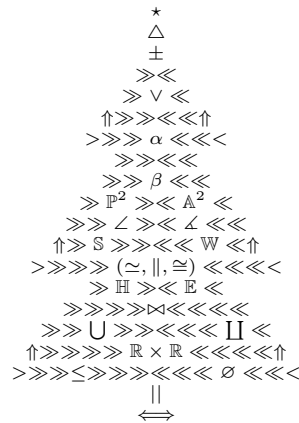
Hinweise:

- Sie dürfen verwenden, dass das Minimalpolynom von ζ_{15} durch Φ_{15} gegeben ist. Hierbei gilt

$$X^{15} - 1 = \prod_{\substack{1 \leq d \leq 15 \\ d|15}} \Phi_d(X)$$

und für p prim gilt $\Phi_p(X) = \sum_{i=0}^{p-1} X^i$.

- Sie dürfen verwenden, dass S_5 keinen Zyklus der Länge 15 und keine zwei disjunkten Zyklen der Länge 3 und 5 besitzt.



**Wir wünschen allen
frohe Weihnachten
und einen guten Start ins neue Jahr!**