Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 10
Abgabetermin: Donnerstag, 07.01.2016, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

(a) Welche der folgenden Körpererweiterungen besitzen ein primitives Element? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches.

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$.

(ii) $K(X,Y)/K(X+Y, XY)$, für einen Körper K.

(b) Sei E ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und sei $L := E(X,Y)$ der Körper der rationalen Funktionen in den Unbestimmten X, Y über E. Weiter sei $K := E(X^p, Y^p) \subset L$. Zeigen Sie, dass es kein primitives Element von L/K gibt.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

(a) Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal? (Begründen Sie Ihre Antworten.)

(i) $\mathbb{F}_{81}/\mathbb{F}_9$.

(ii) $\mathbb{F}_{25}(t)/\mathbb{F}_{25}(t^8)$.

(b) Seien p und q prim. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^{p^q} - X \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ in p verschiedene Faktoren vom Grad 1 und in $\frac{p^q-p}{q}$ verschiedene Faktoren vom Grad q zerfällt.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei p prim und $\mathbb{F}$ ein algebraischer Abschluss des Körpers $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dann wissen wir aus der Vorlesung, dass $\mathbb{F}$ zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau einen Teilkörper $\mathbb{F}_{p^n}$ mit p^n Elementen enthält. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{n!}}$ (erklären Sie Addition und Multiplikation).

(b) $\mathbb{F}_{q^\infty} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^{q^n}}$ ist ein echter, unendlicher Teilkörper von $\mathbb{F}$.

(c) Sei $\psi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, $x \mapsto x^p$ der Frobenius-Automorphismus. Dann ist $\Gamma := \langle\psi\rangle \subset \operatorname{Aut}\mathbb{F}$ eine unendliche Gruppe.

(d) $\mathbb{F}_{q^\infty}$ ist vollkommen.

(e) Es gibt Automorphismen φ von $\mathbb{F}$ mit $\varphi \notin \Gamma$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

(a) Berechnen Sie das Minimalpolynom von $\zeta_{15} = e^{\frac{2\pi i}{15}}$ über $\mathbb{Q}$.

(b) Sei M der Zerfällungskörper von $X^{15} - 10$ über $\mathbb{Q}$ und sei G die Automorphismengruppe von M über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie die Gruppe G und zeigen Sie, dass G nicht isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist.

Hinweise:

- Sie dürfen verwenden, dass das Minimalpolynom von ζ_{15} durch Φ_{15} gegeben ist. Hierbei gilt

$$X^{15} - 1 = \prod_{\substack{1 \leq d \leq 15 \\ d | 15}} \Phi_d(X)$$

  und für p prim gilt $\Phi_p(X) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i$.

- Sie dürfen verwenden, dass S_5 keinen Zyklus der Länge 15 und keine zwei disjunkten Zyklen der Länge 3 und 5 besitzt.

$\star$
$\triangle$
$\pm$
$\gg\ll$
$\gg \vee \ll$
$\Uparrow\gg\gg\ll\ll\Uparrow$
$>\gg\gg \alpha \ll\ll<$
$\gg\gg\ll\ll$
$\gg\gg \beta \ll\ll$
$\gg \mathbb{P}^2 \gg\ll \mathbb{A}^2 \ll$
$\gg\gg \angle \gg\ll \measuredangle \ll\ll$
$\Uparrow\gg \mathbb{S} \gg\gg\ll\ll \mathbb{W} \ll\Uparrow$
$>\gg\gg\gg (\simeq, \|, \cong) \ll\ll\ll<$
$\gg \mathbb{H} \gg\ll \mathbb{E} \ll$
$\gg\gg\gg\gg\bowtie\ll\ll\ll\ll$
$\gg\gg \bigcup \gg\gg\ll\ll\ll \coprod \ll$
$\Uparrow\gg\gg\gg\gg \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ll\ll\ll\ll\Uparrow$
$>\gg\gg\leq\gg\gg\gg\ll\ll\ll \varnothing \ll\ll<$
$||$
$\Longleftrightarrow$

Wir wünschen allen
frohe Weihnachten
und einen guten Start ins neue Jahr!