Übungen zur Algebra I

Wintersemester 2015

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. Denis Vogel
Dr. Claudia Alfes

Blatt 1
Abgabetermin: Donnerstag, 22.10.2015, 14:15 Uhr

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Sei $I := \{g \in G : g^2 = e\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist $I = G$, so ist G abelsch.

(b) Ist G endlich und die Ordnung von G gerade, so enthält I eine gerade Anzahl von Elementen.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit höchstens vier Elementen abelsch ist.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei G eine Gruppe und seien U, V Untergruppen von G. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $UV = VU$ genau dann, wenn UV eine Untergruppe von G ist.

(b) Die Vereinigung $U \cup V$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei G eine endliche zyklische Gruppe mit $|G| = n$. Zeigen Sie: Zu jedem positiven Teiler d von n gibt es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung d.