Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 13 12. Juli 2010

Für eine Primzahl p bezeichne $d_p(\cdot,\cdot)$ (bzw. $d_p(\cdot,0)=\beta_p(\cdot)$) die in Aufgabe 4 vom vorherigen Blatt definierte Metrik (bzw. Norm).

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei p eine Primzahl.

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der Metrik d_p gegen 0 konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ sowohl eine p-adisch konvergente als auch eine p-adisch divergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei $R = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass R bzgl. der p-adischen Norm β_p genau dann konvergiert, wenn die Folge der Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge bzgl. der p-adischen Norm β_p bilden.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Berechnen Sie $d_p(a,b)$, wobei

a) $a=1,\ b=26,\ p=5,$

b) $a=1/9,\ b=-1/16,\ p=5,$

c) $a=9!,\ b=0,\ p=3,$

d) $a=2^{2^N}/2^N,\ b=0,\ p=2.$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass für die Norm β_p auf $\mathbb{Q}$ gilt: $\beta_p(n)\le 1$ für alle $n\in\mathbb{Z}$. Man bezeichnet β_p damit auch als nicht-archimedische Norm.
Zusatz: Sei $|\cdot|$ eine nicht-archimedische Norm auf $\mathbb{Q}$. Dann gilt schon $|x+y|\le\max\{|x|,|y|\}$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 19. Juli 2010, in der Vorlesung.