Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 12 5. Juli 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Für eine natürliche Zahl a in der Dezimaldarstellung

$$a = z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + z_1 10^1 + z_0, \quad z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}, z_n \neq 0,$$

sei

$$Q(a) := z_0 + z_1 + \ldots + z_n \text{ und } Q'(a) := z_0 - z_1 \pm \ldots (-1)^n z_n.$$

Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$Q(a \pm b) \equiv Q(a) \pm Q(b) \mod 9$$
$$Q(ab) \equiv Q(a)Q(b) \mod 9.$$

bzw.

$$Q'(a \pm b) \equiv Q'(a) \pm Q'(b) \mod 11$$
$$Q'(ab) \equiv Q'(a)Q'(b) \mod 11.$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie mit Hilfe der Neuner- und Elferprobe, dass die Rechnung $114116 : 415 = 275$ falsch ist. Überprüfen Sie ferner auf die selbe Art die folgenden Rechnungen auf Richtigkeit: $377194 : 637 = 592$, $797885 : 825 = 967$, $512172 : 694 = 783$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Begründen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $Q(Q(a)) \equiv a \mod 9$,

b) $Q'(Q'(a)) \equiv a \mod 11$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei p eine Primzahl. Für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ hat man $r = p^m \frac{a}{b}$ mit einem eindeutig bestimmten $m \in \mathbb{Z}$ und teilerfremden ganzen Zahlen $a, b,\ b > 0$, sodass $\mathrm{ggT}(ab, p) = 1$. Für den durch $\beta_p(r) = p^{-m},\ \beta_p(0) = 0$ auf $\mathbb{Q}$ definierten p-adischen Betrag zeige man für $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$\beta_p(rs) = \beta_p(r)\beta_p(s),\ \beta_p(r + s) \leq \max\{\beta_p(r), \beta_p(s)\}$$

Man folgere, dass $d_p(r, s) := \beta_p(r - s)$ somit eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 12. Juli 2010, in der Vorlesung.