

Aufbau der Zahlssysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 12

5. Juli 2010

Aufgabe 1.

(4 Punkte)

Für eine natürliche Zahl a in der Dezimaldarstellung

$$a = z_n 10^n + z_{n-1} 10^{n-1} + \dots + z_1 10^1 + z_0, \quad z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, z_n \neq 0,$$

sei

$$Q(a) := z_0 + z_1 + \dots + z_n \text{ und } Q'(a) := z_0 - z_1 \pm \dots (-1)^n z_n.$$

Zeigen Sie: Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} Q(a \pm b) &\equiv Q(a) \pm Q(b) \pmod{9} \\ Q(ab) &\equiv Q(a)Q(b) \pmod{9}. \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} Q'(a \pm b) &\equiv Q'(a) \pm Q'(b) \pmod{11} \\ Q'(ab) &\equiv Q'(a)Q'(b) \pmod{11}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

(4 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Neuner- und Elferprobe, dass die Rechnung $114116 : 415 = 275$ falsch ist. Überprüfen Sie ferner auf die selbe Art die folgenden Rechnungen auf Richtigkeit: $377194 : 637 = 592$, $797885 : 825 = 967$, $512172 : 694 = 783$.

Aufgabe 3.

(4 Punkte)

Begründen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt:

- a) $Q(Q(a)) \equiv a \pmod{9}$,
- b) $Q'(Q'(a)) \equiv a \pmod{11}$.

Aufgabe 4.

(4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ hat man $r = p^m \frac{a}{b}$ mit einem eindeutig bestimmten $m \in \mathbb{Z}$ und teilerfremden ganzen Zahlen a, b , $b > 0$, sodass $\text{ggT}(ab, p) = 1$. Für den durch $\beta_p(r) = p^{-m}$, $\beta_p(0) = 0$ auf $\mathbb{Q}$ definierten p -adischen Betrag zeige man für $r, s \in \mathbb{Q}$:

$$\beta_p(rs) = \beta_p(r)\beta_p(s), \quad \beta_p(r+s) \leq \max\{\beta_p(r), \beta_p(s)\}$$

Man folgere, dass $d_p(r, s) := \beta_p(r - s)$ somit eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ definiert.