Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 8 7. Juni 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}$ heisst Ideal von $\mathbb{Z}$, wenn gilt:

a) $(\mathfrak{a}, +)$ ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$,

b) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ und alle $a \in \mathfrak{a}$ gilt $ka \in \mathfrak{a}$.

Zeigen Sie: Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}$ hat die Gestalt $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a$ mit geeignetem $a \in \mathfrak{a}$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Für zwei Ideale $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}a$ und $\mathfrak{b} = \mathbb{Z}b$ von $\mathbb{Z}$ sei

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} := \{x + y;\ x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein Ideal in $\mathbb{Z}$ ist mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathbb{Z}d$, wobei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils den Tausenderrest von 7^{9999}, 11^{9999}, 13^{9999}.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\varphi(m) = \#\{k \in \{1, \ldots, m\};\ \mathrm{ggT}(k, m) = 1\} \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: $\varphi(m)$ ist gerade für $m \geq 3$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 14. Juni 2010, in der Vorlesung.