Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 7 31. Mai 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Beweisen Sie folgende Rechenregeln für den ggT ganzer Zahlen a, b, c:

a) $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(b, a)$,

b) $\mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c)) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$,

c) $\mathrm{ggT}(ac, bc) = |c| \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$,

d) $\mathrm{ggT}(a, 1) = \mathrm{ggT}(1, a) = 1$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie: Sind $a, b \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}_0$, dann ist $a \equiv b \mod (m)$ genau dann, wenn a und b bei Division durch m denselben Rest r mit $0 \leq r < m$ lassen.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Genau dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit

$$ax + by = c \tag{$*$}$$

wenn gilt: $d := \mathrm{ggT}(a, b) \mid c$.
Ist diese Bedingung erfüllt und ist

$$ax_0 + by_0 = d = \mathrm{ggT}(a, b) \neq 0,$$

dann besteht die Menge aller Lösungen von $(*)$ aus allen Paaren $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ der Gestalt

$$x = \frac{cx_0 + bk}{d},\ y = \frac{cy_0 - ak}{d}$$

mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$. Man beachte: $\left(\frac{cx_0}{d}, \frac{cy_0}{d}\right)$ ist eine spezielle Lösung von $(*)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie alle *positiven* Lösungen $x, y \in \mathbb{Z}$ der Gleichung

$$7x + 5y = 100.$$

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 7. Juni 2010, in der Vorlesung.