Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 5 17. Mai 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Fermatzahl $F_5 := 2^{2^5} + 1$ durch 641 teilbar ist.
Tipp: $F_5 = 2^{32} + 1 = (2 \cdot 2^7)^4 + 1$ und $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, die Fermatzahlen F_m und F_n stets teilerfremd sind: $\mathrm{ggT}(F_m, F_n) = 1$. Folgern Sie hieraus den Satz von Euklid über die Unendlichkeit der Primzahlen.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*

Zeigen Sie unter Verwendung der Aussage des Primzahlsatzes, dass es positive Konstanten c_1 und c_2 gibt, so dass für die n-te Primzahl p_n gilt (n hinreichend groß):

$$c_1 n \log n < p_n < c_2 n \log n.$$

Folgern Sie hieraus die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ und damit erneut den Satz von Euklid.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$M := \{xa + yb;\ x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$$

natürliche Zahlen enthält. Ist $d = \mathrm{Min}(M \cap \mathbb{N})$, so gilt $d = \mathrm{ggT}(a, b)$ und $M = \mathbb{Z}d = \{dx;\ x \in \mathbb{Z}\}$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 24. Mai 2010, in der Vorlesung.