Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Dr. Rolf Busam
Andreas Riedel

Aufbau der Zahlsysteme

Sommersemester 2010

Aufgabenblatt 4 10. Mai 2010

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Für die natürlichen Zahlen $a = 220$ und $b = 284$ gilt $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b = 504$, wobei für ein $a \in \mathbb{N}$ die Summe aller Teiler durch

$$\sigma(a) = \sum_{\substack{1 \le d \le n \\ d|a}} d$$

definiert ist. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, und sind die drei Zahlen

$$p := 3 \cdot 2^{n-1} - 1,\ q := 3 \cdot 2^n - 1 \text{ und } r := 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

Primzahlen, dann sind die beiden Zahlen

$$a := 2^n \cdot p \cdot q \text{ und } b := 2^n \cdot r$$

befreundet, d.h. $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$. Insbesondere sind 220 und 284 befreundet. Finden Sie zwei weitere befreundete Zahlenpaare.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $p^n,\ n \in \mathbb{N}$, stets defizient ist. Warum hat p^2 keinen Freund?

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie alle abundanten Zahlen aus der Menge

$$\mathbb{A}_{50} = \{x \in \mathbb{N};\ 1 \leq x \leq 50\}.$$

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus den ggT der folgenden Zahlen a, b, c und stellen Sie den ggT jeweils als ganzzahlige Linearkombination der betreffenden Zahlen dar:

a) $a = 1001,\ b = 781,$

b) $a = 6894,\ b = 1116,$

c) $a = 345,\ b = 111, c = 678.$

Tipp: Bei c) ist die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(a, b, c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$ nützlich.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/zahlen`
Abgabe bis spätestens 17. Mai 2010, in der Vorlesung.