Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 12 9. Juli 2013

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei G eine topologische Gruppe und R ein topologischer Ring. Alle auftretenden R-Moduln sind topologische R-Modul mit einer stetigen Operation von G. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Ext}^1(R, M)$ die Isomorphieklassen von exakten Sequenzen $0 \to M \to E \to R \to 0$ von solchen Moduln. Dabei sind zwei Erweiterungen E, E' isomorph, falls es einen G-equivarianten Isomorphismus von R-Moduln $E \xrightarrow{\sim} E'$ gibt, der der das offensichtliche Diagramm kommutieren lässt. Zeigen Sie: Man hat eine natürliche Bijektion $\mathrm{Ext}^1(R, M) \xrightarrow{\sim} H^1(G, M)$.
Hinweis: Betrachten Sie $g \mapsto e - g.e$ für $e \in E$ mit $e \mapsto 1 \in R$ und konstruieren Sie für die Umkehrabbildung eine Erweiterung, die den "richtigen" Kozykel liefert.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei G eine kompakte Gruppe und V eine endlich-dimensionale $\mathbb{Q}_p$-lineare stetige Darstellung von G. Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{Z}_p$-Gitter T enthält, welches stabil unter G ist.

Aufgabe 3. *(3 Punkte)*
Sei D ein endlicher freier Modul über $\mathbb{E}_K, \mathbb{A}_K$ oder $\mathbb{B}_K$, ausgestattet mit einer semilinearen Operation φ und einer semilinearen Operation von Γ_K. Zeigen Sie: Ist nach Basiswahl von D die Matrix von φ durch P und die Matrix von $\gamma \in \Gamma$ durch G gegeben, so ist die Bedingung, dass P und G als semilineare Operatoren kommutieren äquivalent dazu, dass $P\varphi(G) = G\gamma(P)$.

Aufgabe 4. *(5 Punkte)*
Sei k ein separabel abgeschlossener Körper der Charakteristik p mit Frobenius $\sigma : x \mapsto x^p$. Sei weiterhin V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum mit einer σ^a-semilinearen Abbildung $\varphi : V \to V$ für ein $a \in \mathbb{N}$, sodass die Matrix von φ bzgl. einer Basis von V invertierbar ist. Zeigen Sie:

a) V hat eine Basis, die von φ festgelassen wird.

b) $1 - \varphi$ ist surjektiv auf V.

Sei weiterhin A ein bzgl. der p-adischen Topologie vollständiger Ring mit $A/pA = k$, der zusätzlich mit einem Frobeniuslift σ von $x \mapsto x^p$ auf k ausgestattet ist. Sei V ein endlicher freier A-Modul mit einer σ^a-semilinearen Abbildung $\varphi : V \to V$, $a \in \mathbb{N}$, sodass die Matrix von φ bzgl. einer Basis von V invertierbar ist. Zeigen Sie dann a) und b) in diesem Setting.
Hinweis: Teilnehmer des Anstiegsseminars haben die erste Aussage im ersten Vortrag gesehen.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 16. Juli 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.