Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 11 2. Juli 2013

Auf diesem Blatt seien $\mathbb{Q}_p \subset L \subset K$ endliche Erweiterungen.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Sei G eine lokal L-analytische Gruppe. Für $g \in G$ bezeichne wie üblich $\delta_g \in D(G,K)$ die Dirac-Distribution. Sei $\Delta = \langle \delta_g | \ g \in G \rangle_K \subset D(G,K)$. Zeigen Sie:

a) Ist $H \subset G$ kompakt und offen, so gilt $D(G,K) = \bigoplus_{g \in G/H} \delta_g * D(H,K)$.

b) Ist G kompakt und ℓ eine stetige Linearform auf $D(G,K)$, die auf Δ verschwindet, so folgt $\ell = 0$.

c) $\overline{\Delta} = D(G,K)$.

Aufgabe 2. *(8 Punkte)*

a) Seien X, Y lokal K-analytische Mannigfaltigkeiten, U, V, W K-Banachräume sowie $\beta : U \times V \to W$ eine stetige Bilinearform. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\tilde{\beta} : C^{\mathrm{an}}(X,U) \times C^{\mathrm{an}}(Y,V) \longrightarrow C^{\mathrm{an}}(X \times Y, W), \quad (f,f') \longmapsto \big\{(x,y) \mapsto \beta(f(x), f'(y))\big\}$$

wohldefiniert und stetig ist.

b) Seien $P \subset G$ lokal K-analytische Gruppen und ρ eine lokal-analytische Darstellung von P auf einem K-Banachraum V. Zeigen Sie, dass jede Spaltung ι der kanonischen Projektion $\pi : G \to G/P$ einen topologischen Isomorphismus $\mathrm{Ind}_P^G(\rho) \cong C^{\mathrm{an}}(G/P, V)$ induziert.

Hinweis: Charakterisieren Sie $\mathrm{Ind}_P^G(\rho)$ als Teilmenge von $C^{\mathrm{an}}(G/P \times P, V) \cong C^{\mathrm{an}}(G,V)$ und betrachten Sie mit a) die durch $\beta : \mathrm{End}(V) \times V \to V, \ (f,x) \mapsto f(x)$ induzierte Abbildung $\tilde{\beta}$, um den Isomorphismus zu konstruieren.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Seien

$$G = \left\{ \alpha \in GL_2(\mathbb{Z}_p) | \ \alpha \equiv \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \bmod p \right\}, \ P = \left\{ \alpha \in G | \ \alpha = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \ T = \left\{ \alpha \in G | \ \alpha = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Sei $\chi : T \to K^\times$ ein lokal-analytischer Charakter. Zeigen Sie:

a) χ induziert auf P auf kanonische Weise eine lokal-analytische Darstellung, die wir auch mit χ bezeichnen.

b) $\mathrm{Ind}_P^G(\chi) \cong C^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 9. Juli 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.