Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 7 4. Juni 2013

Sei K ein nicht-archimedischer Körper.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Seien M, N, L K-analytische Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie:

a) Die Projektionsabbildung $pr_M : M \times N \to M$ ist lokal analytisch. Dies gilt ebenso für pr_N.

b) Sind $g : L \to M$ und $f : L \to N$ lokal analytische Abbildungen, so ist die Abbildung $(g, f) : L \to M \times N,\ x \mapsto (g(x), f(x))$, lokal analytisch.

c) Ist M zusätzlich mit einer (abstrakten) Gruppenstruktur versehen ist, so ist die Abbildung $M \times M \to M,\ (g, h) \mapsto gh^{-1}$ lokal analytisch genau dann, wenn die Abbildungen $M \times M \to M,\ (g, h) \mapsto gh$ und $M \to M,\ g \mapsto g^{-1}$ lokal analytisch sind.

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Sei M eine K-analytische Mannigfaltigkeit und E ein K-Banachraum. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$d : C^{\mathrm{an}}(M, E) \longrightarrow C^{\mathrm{an}}(T(M), E), \quad f \longmapsto df$$

ist K-linear.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei M eine K-analytische Mannigfaltigkeit und $T(M)$ das Tangentialbündel zu M. Für $U \subset M$ offen sei wie in der Vorlesung

$$\Gamma(U, T(M)) := \{\xi : U \to T(M) |\ \xi \text{ lokal analytisch und } p_M \circ \xi = \mathrm{id}_U\}.$$

Zeigen Sie:

a) Hat M die Dimension m, so hat $T(M)$ die Dimension $2m$.

b) $\Gamma(-, T(M))$ ist eine Garbe von K-Vektorräumen auf $T(M)$.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Sei $p \neq 2$. Eine p-adische Liegruppe G heisst **Standardgruppe**, falls die Mannigfaltigkeitstruktur auf G durch einen globalen Atlas (G, ψ, r), wobei $\psi : G \xrightarrow{\sim} p\mathbb{Z}_p^r$ ein Homöomorphismus mit $\psi(1) = 0$ ist, definiert werden kann und ausserdem für $j \in \{1, \ldots, r\}$ Elemente $P_j \in \mathbb{Z}_p[[X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_r]]$ existieren mit $\psi_j(xy^{-1}) = P_j(\psi(x), \psi(y))$, wobei $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Gruppen G Beispiele für Standardgruppen liefern:

a) $G = (p\mathbb{Z}_p^r, +)$.

b) $G = \mathrm{Id} + pM_n(\mathbb{Z}_p)$ aus Aufgabe 2, Blatt 3.

Bemerkung: $(P_j(X, Y))$ ist eine formale Gruppe.

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 11. Juni 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.