Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

p-adische Analysis II

Sommersemester 2013

Aufgabenblatt 6 28. Mai 2013

Sei K ein nicht-archimedischer sphärisch vollständiger Körper mit Bewertungsring $\mathcal{O}$ sowie V ein lokal-konvexer K-Vektorraum.

Aufgabe 1. *(2 Punkte)*
Zeigen Sie, dass $C^{\mathrm{an}}(\mathbb{Z}_p, K)$ ein reflexiver, bornologischer, hausdorffscher lokal-konvexer K-Vektorraum ist, dessen starkes Dual ein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe 2. *(9 Punkte)*
Sei M eine kompakte K-analytische Manngifaltigkeit und V ein lokal konvexer K-Vektorraum. Ist V ein Banachraum, so erinnern wir, dass die Topologie, die von der üblichen Operatornorm auf V' erzeugt wird, mit der Topologie auf V'_b übereinstimmt. Zeigen Sie:

a) Ist V ein Banachraum, so ist $\{\ell \in V' | \ \|\ell\| \leq 1\}$ kompakt in V'_s.

Hinweis: Betrachten Sie $(\ell(v))_{v \in V, \|v\| \leq 1}$ zu $\ell \in V'$.

Damit betrachten wir den $\mathcal{O}$-Modul $\mathcal{O}[[M]] := \{\ell \in D^c(M,K)_b | \ \|\ell\| \leq 1\}$, versehen mit der schwachen Topologie aus a). Man definiert die **beschränkt-schwache Topologie** auf $D^c(M,K)$ als die feinste lokal-konvexe Topologie, sodass $\mathcal{O}[[M]] \subset D^c(M,K)$ stetig ist. Zeigen Sie:

b) Ist T ein vollständiger hausdorffscher topologischer $\mathcal{O}$-Modul, sodass $0 \in T$ eine offene Umgebungsbasis von $\mathcal{O}$-Untermoduln hat, so ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O},\mathrm{stetig}}(\mathcal{O}[[M]], T) \longrightarrow C(M,T), \quad A \mapsto [x \mapsto A(\delta_x)]$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von $\mathcal{O}$-Moduln.

Hinweis: Betrachten Sie das Analogon der Abbildung I aus der Vorlesung.

c) Ist V vollständig und hausdorffsch, so ist die Abbildung

$$\mathcal{L}(D^c(M,K), V) \longrightarrow C(M,V), \quad A \longmapsto [x \mapsto A(\delta_x)]$$

wohldefiniert und ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*
V ist ein **Montel-Raum**, falls er tonneliert ist und falls jede abgeschlossene beschränkte konvexe Menge c-kompakt ist (dies kann man als Analogon der Heine-Borel Eigenschaft verstehen). Aus Schneider, NFA, §15 folgt dann, dass reflexive Räume genau die Montel-Räume sind. Zeigen Sie:

a) Ist $V = M \oplus N$, so ist V ein Montel-Raum genau dann, wenn M und N dies sind.

b) Ist $V'_c = \mathcal{L}_{\mathcal{B}}(V,K)$ mit $\mathcal{B}$ die Menge aller konvexen c-kompakten Teilmengen von V und V ein Montel-Raum, so gilt $V'_c = V'_b$.

c) Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) eines Montel-Raums an. Ist $c_0(\mathbb{N})$ ein Montel-Raum?

Homepage zur Vorlesung: `www.mathi.uni-heidelberg.de/~ariedel/panalysis2`
Abgabe bis spätestens 4. Juni 2013 vor der Vorlesung, in A. Pals Kasten im 1. OG.